目　录

1 导　论

在科学的发展上可以得到最大收获的领域是各种已经建立起来的部门之间的被忽视的无人区。……正是这些科学的边缘区域，给有修养的研究者提供了最丰富的机会。

诺伯特·维纳(Norbert·Wiener)

1.1 控制论的起源

控制论这门科学是40年代后期才开始发展的，它的诞生一般是以1948年诺伯特·维纳的出色著作《控制论》的出版为标志[1]；这是人类科学发展史上又一新的里程碑。

维纳是美国的著名数学家。他生于1894年，逝世于1964年。除了在数学上有很高造诣之外，他是一位兴趣十分广泛，知识渊博和思想活跃的学者。他曾被誉为"神童"。14岁毕业于塔夫茨学院，18岁获得塔夫茨学院博士学位，1913年至1915年到英国剑桥大学和德国哥廷根大学研究数学。从师于著名学者B·罗素，G.H.哈迪和D·希尔伯特。1919年起到马萨诸塞理工学院数学系工作。1948年发表了上述奠基性著作。

在《控制论》中，这位杰出的学者清楚地论述了发展一门一般的控制理论的方法，并为从一个统一观点来考察各种系统的控制和通讯问题的方法奠定了基础。此书震动了科学界，维纳也因此一举成名。科学家们被该书中新颖的科学思想和观点所深深地吸引，纷纷研究和引进控制论，控制论像澎湃的春潮，席卷了几乎所有的科学领域。

和所有的新兴科学一样，控制论的诞生和发展绝非偶然，而是有着悠悠流长的思想渊源和深刻的历史背景。

构成控制论基本概念的若干科学趋势，可以追溯到几千年前。

在我国古代，二千多年前业已成书的中医名著《黄帝内经》，就已体现了控制论的朴素思想。在西方，控制论一词 cybernetics 来源于古希腊文 κνβερνητηξ 即"掌舵术"。从近代历史来看，在 17 世纪，巴斯卡(Pascal)和莱布尼茨(Leibniz)就曾有过设计数字计算机的想法。在 19 世纪巴贝奇 (Babbage)又以更成熟和精巧的方式研究过这种自动计算装置。一百多年前，从麦克斯韦(Maxwell)和维什涅格拉特斯基(Вышнеградский)的工作开始，控制和反馈系统的理论就已经发展起来了。1868年麦克斯韦发表的一篇关于调速器的文章是关于反馈机构的第一篇重要论文。用逻辑语言来研究系统的专著也已在五十多年前问世。然而，所有这些工作都没有形成系统的思想和理论，以致于维纳《控制论》发表会产生如此强烈的震动和"连锁反应"。

在科学的进程中，数学和物理科学、生物科学和计算机科学对控制论的诞生起了关键的作用，成为控制论思想的发源地。

数学和物理的发展，导致了人们对随机现象的定量研究。一个多世纪以来，吉布斯提出的统计力学观念已经浸入了当时科学的每一个分支。按照拉普拉斯决定论和牛顿力学的格式来描绘世界的观点，已经被统计的、进化的观点所取代。在这种观点的影响下，维纳突破了传统的自动调节理论，把自动控制理论建立在统计理论的基础之上。这种新的观点和数学框架，为控制理论的发展，开创了新的阶段。

生物科学的发展，曾经历了重大的革命。19世纪下半叶生物学的变革，建立了动植物组织的细胞构造理论，出现了达尔文的进化论。而现代生物学的革命则主要是以分子生物学的发展和在分子水平上研究生物体的生物学认识方法为前提。在发展的过程中，工程系统中的稳定性概念也进入了生物系统的研究。早在一百多年前，法国生理学家伯尔纳(Claude.Bernard) 就对生理参数的稳定性有深刻的认识。他认为："内环境的恒定性是机体自由和独立生存的基本条件。"1929 年美国生理学家坎农(Walter.B.Cannon)把这种内环境的稳定称之为体内稳态(hameostasis)，它是指

机体内环境不断地通过复杂的神经体液调节，所建立起的动态平衡。没有控制和调节就不可能有体内稳态。正是这种体内稳态，保证了复杂的生理过程在生命的原生质中得以正常进行。体内稳态概念的建立，意味着人类对生命活动的认识已进入一个新的阶段，推动了生物科学发展的同一智力冲动，同时也推动了控制论的发展。1943年，维纳、别格罗和罗森勃吕特联名发表了著名论文《行动，目的和目的论》，首次用反馈来代替目的性的行为，揭示了生物学、生理学、机器控制和信息的共同特性，这是控制论萌芽的重要标志。

计算机科学的早期研究，主要是计算机的制造和数理逻辑的研究。这种研究也推动了思维过程理想的或实际的模型化。维纳在《控制论》的导论中写道："在控制论的历史上反复出现过的一个因素，即数理逻辑的影响，这时也参与进来了。假如我必须为控制论从科学史上挑选一位守护神，那就挑选莱布尼茨。莱布尼茨的哲学集中表现于两个密切联系着的概念——普遍符号论的概念和推理演算的概念。"早在电子计算机问世之前，维纳等人已经预言，以替续的开关装置为基础的快速计算机必定会是神经系统中发生的各种问题的模型。神经元兴奋的"全或无"性质与二进制数中决定数字时的单一选择和开关网络的"断或通"性质之间是十分相似的；解释动物记忆的性质和变化的问题与机器中的人工记忆问题也是互相类似的。来自计算机科学的思想、类比和计算机制造的实践，使得维纳及其同事们关于控制论的思想日趋完善和成熟。

除了历史和现实的客观原因及控制论奠基者们的渊博知识和天才条件之外，控制论的诞生还得益于方法论上的创新和突破。

维纳曾是B.罗素的弟子，他对于哲学和方法论有着特殊的兴趣。1911～1913年，他在哈佛参加过约·劳埃斯领导的方法论讨论班。30年代后，又参加了由哈佛医科学校的阿托罗·罗森勃吕特博士领导的科学方法讨论会。参加者大多是哈佛医科学校的青年科学家，也有数、理、电子、工程和心理学等各行业的专家。经过充分的讨论，维纳和罗森勃吕特共同认识到：现代科学的发展，

一方面使科学日益成为专门家在愈来愈窄的领域内进行着的事业；另一方面又出现了互相交叉的边缘地带。这些边缘区域需要科学的综合研究。他们认为，在这块科学的处女地上去作适当勘查和耕耘的工作，只能由一批既是他自己领域的专家又对与他邻近的领域有着十分正确和熟练知识的专家来担任。"数学家不需要有领导一个生理学实验的本领，但却需要有了解一个生理学实验、批判一个实验和建议别人去进行一个实验的本领。生理学家不需要有证明某一个数学定理的本领，但是必须能够了解数学定理中的生理学意义，能够告诉数学家他应当去寻找什么东西。"[1]

正是在这种共同观念和方法的指导下，在维纳和罗森勃吕特周围聚集了一批杰出的科学家，其中有博奕论和二进制计算机的创始人冯·诺意曼，数学家和工程师别格罗、戈德斯汀，神经生理学家瓦·麦克卡洛，数理逻辑学家匹茨，数学家李郁荣博士和物理学教授瓦拉尔塔博士等等。在这一批科学家的努力下，1943年至1944年之间的冬末，由维纳和诺意曼发起，在普林斯顿召开了一次对控制论的全面讨论会，工程界、数学界和生物学界都有代表参加。这次会议沟通了思想，使大家明白，在不同领域的工作者之间确实存在着一个实在的共同的思想基础，每一个人都可以运用已经由别人发展得更为成熟的概念，然而必须采取一些步骤来获得共同的辞汇。1946年春，由麦克卡洛与梅氏基金会主持，在纽约召开了反馈问题的专题会议，心理学家、社会学家和经济学家也参加了会议。这两次会议成为控制论产生的序曲，1948年，维纳《控制论》的出版，宣告了作为一门科学的控制论的正式诞生。

控制论的诞生，具有十分重要的理论意义和实践意义。它是20世纪上半叶继相对论和量子论之后的又一科学理论的伟绩。它不仅揭示了生命机体、社会与技术系统之间共同的控制规律，而且在许多方面冲破了传统的思维方式和研究方法的束缚，为现代科学的研究提供了一套崭新的科学方法，它还促进了当代哲学观念的一系列变革。

1.2 控制论的研究对象

自从维纳提出控制论至今，虽已经历了近40年的历史，但是，对于什么是控制论?控制论的研究对象是什么?还没有一个统一的定义。人们从不同的侧面去认识和研究控制论，对于它的解释也各有侧重。这也许是所有新兴边缘学科所共有的特征。然而，作为一门学科总有一个大致的研究范围，在本节中，我们将对控制论的研究对象及其特点作一简略的分析。

首先，我们分析控制论创始人维纳对这一问题的看法。维纳在《控制论》书名的副标题中，明确指出控制论的研究对象是动物和机器中的控制和通讯问题。当时，他对于控制论能用于社会系统持怀疑态度。几年后，在《人当作人来使用》一书中，他不仅改变了看法，甚至认为控制论在社会系统中应用的可能性已经出现，以后维纳的认识又有发展，在1960年，他参加了在莫斯科举行的国际自动控制联合会、国际自动控制与自动调节联合会第一次会议。在此期间，他明确表示，控制论的最主要和最迫切的任务是“研究自行组织系统、非线性系统以及同生命是怎样一回事有关的那些问题。但是所有这些——三种提法说的是同一回事。”他还说：“我用‘控制论’这个词标志这一个问题的领域，是出自一个简单的原因，我在今天的生物科学和工程科学进行研究的那些过程中，找到了许多相似的东西，因而力图使用这样的词汇，把不同的相似性表示和指明出来，否则在这领域进行的工作就会混杂不齐，并缺少对问题的最基本的共同的理解。我的目的就在于把各个科学领域中进行的努力联合起来，使它们都致力于对相似问题的划一的解决。”

由此可见，维纳把控制论的研究对象扩充到生物、社会和机器中控制和通讯的共同规律的研究，但他强调的是对于有生命系统的控制机制的模拟研究。著名控制论专家英国生理学家艾什比(W. Ross. Ashby)在《控制论导论》一书中，对于控制论研究对象和特点的观点与维纳的观点基本类似，他认为：“控制论也确实可以定义为：它是研究这样一类系统的科学，在这类系统中能量是无

关紧要的，而信息及控制却非常重要，换言之，它研究的系统是'不透信息'的。"同时，艾什比强调控制论是研究复杂系统的。而复杂系统在生物界中则是司空见惯的。

有些哲学家和科学家，与维纳和艾什比的观点则不尽相同。下面仅举几例：

在60年代，捷克斯洛伐克的柯尔曼(A. Kolman)认为控制论是"信号和机械控制的数学理论"。

苏联数学家索波列夫等人认为，控制论是"关于自动机器与生物体中控制与通信方面一些共同问题的各种理论、假设和观点的总和。"但他认为把控制论应用到社会方面去是不适当的。

在70年代，苏联哲学家茹科夫(H. N. Жуков)[30]认为控制论不是一门普通的专门科学，它既不是数学，也不是哲学，它所研究的对象是一种抽象的功能系统，这与一切具体的技术、生物和社会系统是有区别的。他强调控制论的方法论意义。

列尔涅尔(A. Я. Лернев)认为："目前，控制论表示一种能应用于任何系统中的一般控制理论。在这里，所谓'系统'是指当作一个互相关联的整体的一组任意种类的元素。"他同时指出："控制论，作为控制的科学，它并不一般地研究一切系统，而只研究控制系统"，他还提出了"抽象控制论系统"的概念[5]。列尔涅尔提出的控制论的研究对象是非常一般的。

美国学者乔治(F. H. George)在《控制论基础》一书中认为人工智能是控制论的核心部分。他认为："控制论从技术和理论两个方面研究控制和通讯系统，研究控制和通讯在动物和人中间的发生过程。在某种意义上，控制论的基本问题是'能使得机器思维吗？'但在另一种意义上又不是这样，而是如何使得机器能为我们做许多复杂的事。这个观点也就是说一方面我们可能想知道我们是否能制造比人更有理智的机器，或我们仅仅想利用自动化控制系统为我们提供任何有效的帮助。"他还讲到，"控制和通讯的科学，也是人工智能的科学。""控制论的基本问题之一就是模拟和综合人类智能问题，这是控制论的焦点。"

在讨论控制论的研究对象时，必须说明的是，控制论(cybernetics)与控制理论(control theory)是两个不同的概念，应该加以区分。控制理论指的是自动控制理论，它的经典理论是在1945年前后，以伺服机构理论为核心的自动调节理论。在控制论诞生之后，控制论的原理和方法被运用于工程技术领域而形成的工程控制论，它通常也被理解为自动控制理论。因此，自动控制理论既可以指控制论以前的伺服机构理论，也可以指工程控制论。

综上所述，关于控制论的研究对象，虽然众说纷纭，但无论从哪一个角度去定义控制论，它的研究目标是明确的、具体的。正是这种多方面、多角度的研究，使得这门新兴的边缘学科得以迅速地发展。正如维纳在《控制论》第二版序言中所说："如果一门新的科学学科是真正有生命力的，它的引人兴趣的中心就必须而且应该随岁月而转移。"

1.3 控制论的基本概念

控制论是研究一般系统中控制和信息过程共同规律的科学，是一门涉及各个领域的综合性很强的科学。为此，它必须建立起自己的概念体系。这些概念部分是从"旧有的"传统知识领域借用而来，并且以同控制论自身概念体系相适应的方式概括它们。正是通过这些基本的概念，在不同的科学领域之间架起了桥梁，形成了控制论独特的语言和方法。控制论所包含的基本概念有：信息、动态系统、控制、反馈、规划、适应、目的、稳定性、可靠性、最优化、模型和算法等等。所有这些概念，从整体上形成了特殊的概念群，但是这个概念群中的任何一个单独的概念都不是控制论所专有的，它的每一个概念都是同一系列哲学的、一般科学的和专门科学的范畴相联系。在这些概念中，存在一些更为基本的和重要的概念。

在《控制论》发表13年后，维纳在第二版序言中写道："当我开始写《控制论》时，我发现说明我的观点的主要困难在于：统计信息和控制理论的概念，对当时的传统思想来说，不但是新奇的，也许

甚至是对传统思想本身的一种冲击。"可见，信息和控制是控制论中颇具特色的新颖概念。另一方面，控制论是以系统为对象进行研究的，因此，"系统"这个概念也必将是控制论中最基本的概念之一。

在本节中，我们将论述上述三个最基本的概念：信息、系统和控制。其余的概念将在以后的章节逐渐展开和论述。

1.3.1 信息

人类从产生的那天起，就已在信息的海洋中生活。从指南针到现代导航定位技术，从烽火告警到今天的卫星通讯，人们无时无刻不在和一个最基本、也是最容易被忽视的概念——"信息"打交道。

说到"信息"，它究竟是什么呢？要回答这个问题并非是一件简单的事情。

早在两千多年以前，中国古代的两位大哲学家庄子和惠子就提出了这个问题。有一次庄子和惠子在一起观鱼，庄子看见鱼在水里游得十分自在，就对惠子说："你看鱼多么快乐啊！"惠子立即问道："你不是鱼，怎么知道鱼是否快乐呢？"庄子想了一下回答道："你不是我，怎么知道我知不知道呢？"

这个有名的故事叫"庄子观鱼"。其中，庄子和惠子已经在讨论"什么是信息"和"怎样才能得到信息"的问题了。他们采用的方法是思辨哲学的方法。

二千多年之后，随着通讯技术的发展，人们已经不能满足对于信息的一般的、定性的了解，关于信息的本质的理解及其度量，已经成为一个亟待解决的问题。维纳清楚地认识到：控制工程的问题和通讯工程的问题是不能区分开来的，而且，这些问题的关键并不是环绕着电工技术，而是环绕着更为基本的信息概念。信息的变换过程是存在于通讯和控制系统的一个共同特点，这种信息带有某种随机性。通讯和控制系统的结构就必须适应它所接收和加工信息的这种统计特性。然而，传统的观念和传统的确定性数学

是不能正确理解信息的本质和给出信息的定量描述的。为此，必须发展一个关于信息量的统计理论。

这种思想差不多在同一个时候，由好几位科学家提出来。美国统计学家费希尔，从古典统计理论角度研究了信息理论；贝尔电话研究所的申农博士，于1940年起就开始从事信息论的研究，他的研究动机出自于信息的编码问题。1948年，他在《贝尔系统技术杂志》上发表题为"通信的数学理论"的论文，这篇论文被认为是信息论诞生的重要标志。维纳则是从电滤波器中的噪声与消息问题出发来研究信息的统计理论的，他还建立了著名的维纳滤波理论和信号预测理论，阐明了信息定量化的方法和度量公式。由于申农和维纳的工作，信息被作为一个科学的概念进入了各个不同的科学领域。但是，迄今为止，信息这个概念还没有一个公认的定义。

申农把通信系统中的"消息"称之为信息，并试图给出这种信息的度量。这种从通信系统中提出的信息概念，被称为狭义信息概念。申农抓住了狭义信息度量的二个关键之处，一举解决了狭义信息的度量问题。

首先，申农发现，通信只不过是信息的传输，只是单纯地复制消息，并不需要对信息的语义作任何处理和判断。这样就使信息的度量大为简化，这种将信息形式化的窍门是狭义信息度量的第一个关键。

其次，在申农看来，信息乃是"两次不定性之差"。所谓"不定性"，就是指人们获得新知识之后，改变了原有的知识状态，减少或消除了原先的"不定性"。信息量也就是不定性减少或消除的数量。这种统计不定性就是狭义信息度量的第二个关键。

申农的这种思想和统计热力学的"熵"有着密切的联系。"熵"就是一种不定性的数量度量，它表征了一个物理系统的无组织程度。信息是一种被消除了的不定性，因此可以看作是"负熵"。申农和维纳都从数学上给出了信息量的数学表达式：

$$H(x) = -K\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\log_a p(x_i)。$$

其中，$H(x)$表示以x为某事物（事件集）的信息量；K为系数，与不同的单位制有关；$x_1, x_2, \cdots, x_n$表示x事物可能出现的状态或结果；x_i出现的概率用$p(x_i)$表示。

当对数底取2，且$n=2$，$p(x_1)=p(x_2)=\frac{1}{2}$时，

令
$$H(x) = -K\sum_{i=1}^{2} p(x_i)\log_a p(x_i) = 1。$$

以此作为信息的单位，称为比特（bit）。可见，一个等可能的二中择一事件具有1比特的不定性。若选择以e为底的自然对数，这时信息单位称为奈特，若以10为底，信息的单位就称为哈特莱。这些不同的单位之间可以互换。

维纳从控制论的角度出发，提出了含义更为广泛的信息概念。在《控制论与社会》一书中，他认为："信息是我们适应外部世界并且使这种适应为外部世界所感到的过程中，同外部世界进行交换的内容的名称"。从这个定义可以看出，信息是指人、动物或机器等控制系统与外界相互联系的一种形式。

按照现代信息理论的观点来看[22]，任何信息均包含了三个层次：语法信息，语义信息和语用信息。这些概念是从符号学中引伸而来。符号学的研究可以分为三个层次，分别代表了三种不同的抽象水平。语法学：研究符号与符号之间的关系；语义学：研究符号与实体之间的关系；语用学：研究符号与使用者的关系。这三者不是互相独立的，而是互相重叠的：语用学包含语义学，语义学又包含语法学。

容易看出，狭义信息只涉及符号以及符号之间的统计关系，因此属于语法信息的层次。语义信息涉及信息本身的含义及其逻辑上的真实性和精确性，但是它并不考虑信息使用者个人的主观因素。在情报检索系统中和机器翻译过程中，就要考虑信息的语义。比较成功的检索系统有关键词索引，它有助于人们利用浩翰的科技文献。语用信息则与以上的情形不同，它涉及到信息的价值和效用，它对收信者和发信者的依赖性更强，因此，涉及到信息过程

的心理方面；同时，语用信息与时间有着密切的关系。例如对于一个管理系统，一份过时的信息就几乎没有价值了。

上述三个层次的信息，称为广义信息。这种信息包含人类感官所能感知的一切有意义的东西，它是事物存在的方式（或运动状态）以及这种方式（运动状态）的直接或间接的表述。目前，关于广义信息的研究仅仅处于初始阶段，它还在探索和发展之中。近年来，有人试图沿袭狭义信息论的思路，提出用逻辑概率来描述语义信息，用主观概率来描述语用信息；也有人利用模糊数学的方法来研究广义信息，提出了"模糊信息"的概念；还有利用数学中的集论和格论来刻划广义信息，提出了所谓"定性信息"的概念，这是一种比模糊信息更加"模糊"的信息。凡此种种，对于广义信息的描述正在逐步深入和发展，但是，至今尚未取得实质性的进展。

控制论是一门研究利用信息来进行调节和控制的科学，随着信息概念的拓宽，控制论的研究范围也将更为宽广。当然，这已不是早期控制论奠基者们所能想象的格局。一旦广义信息的定量化方面能够取得实质性的进展，将会产生新的控制系统。这意味着人类可以用自己的思维来控制计算机，可以设计出处理广义信息的控制系统，这必将导致人类社会的深刻变革。

1.3.2 系统

"系统"是一个非常一般的和基本的概念，关于它有着许多的定义。广义地说，宇宙间的万事万物，人们研究的所有对象都可以说是系统。一般系统论的创始人贝塔朗菲把系统定义为相互作用要素的综合体或者"是处于一定的相互联系中的与环境发生关系的各组成部分的总体"。他认为系统中最本质的要素是它的"组织联系"。这种"组织联系"，一方面是各个部分的情报渠道；另一方面是各部分动态的相互作用的结果。贝塔朗菲的定义，原则上适用于任何客体，至今仍被作为一切系统概念的基础。

英国著名心理学家和控制论专家艾什比把系统定义为："任何一组变量，它们是实验者从实际机构具有的变量中挑选出来的。"

此处的变量是指一个可测量，它在任何测量时刻都能测到确定的数值。

如果我们仔细剖析系统的定义，可以发现系统的概念具有多层次的涵义：

首先，系统是与周围的“环境”相对而存在的。系统是人们从周围世界中孤立出来的具有一定结构的元素所组成的集合，一切与该系统有关联的其他元素的集合称之为环境。因此，系统的概念具有相对性，它与我们的研究目的有关。例如当我们把某个生物体作为系统时，它的某个器官仅仅是系统的组成元素或称之为子系统；而假定研究的对象就是这个器官，那么自然可将其视为系统。

其次，对于同一对象而言，我们关心的仅仅是某些方面的特征，而忽略其余的属性。也就是按一定的目的和要求选择事物的具有一定属性的特定组成部分，来作为系统的执行特定功能的元素，而忽略事物的其他属性和组成部分。从研究具体系统转到研究抽象系统，这同算术中研究具体数目的运算转到代数中研究抽象数目的运算是同样性质的。这反映了系统概念的抽象性。

另外，系统是以整体的方式存在，并与环境发生作用，表现其功能。作为整体的系统都具有一定的稳定性，自组织性和动态性等等特性。这就是系统的整体性。

最后，系统本身也是以研究对象为原型的一种模型。这种模型反映了研究对象中被我们所关心的某些属性和功能。把两个系统对应起来，如果在两者的元素之间、在两者的内部联系之间及其对外部环境的联系之间都具有某种对应关系时（例如同构对应关系），称这两个系统具有原型-模型关系。这反映了系统概念的模型性。

控制论作为控制的科学，它并不一般地研究一切系统，而只研究存在控制的系统。显然，这是一类极为广泛的系统。诸如工程系统、生物系统、社会系统、经济系统、军事系统和通讯系统等等。凡具有能接收，存贮和处理信息并用它来进行调节和控制的任何

性质的系统，均称之为控制论系统。在本书中，仅介绍这种系统，并简称为系统。

控制论系统一般由控制部分、被控部分以及它们之间的各种信息传输通道构成。每个系统都要受到许多外界的作用。通常把对研究的问题有重要影响的外界作用称之为输入、而把其余的外界影响当作干扰；把系统对周围环境的作用称为输出。可以把系统看作是从输入到输出的某种变换。最简单的控制论系统如图 1-1 所示。

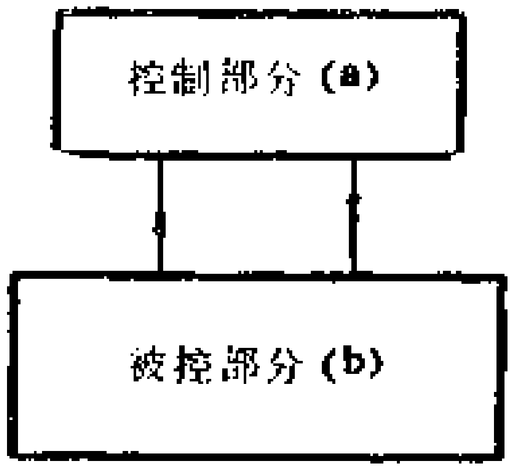


图 1-1 控制论系统的最简结构

控制论系统可以是简单系统，也可以是大规模的、复杂的信息系统。根据不同的观点，可以给出系统的不同分类方法。以下列举一些常用的分类方法：

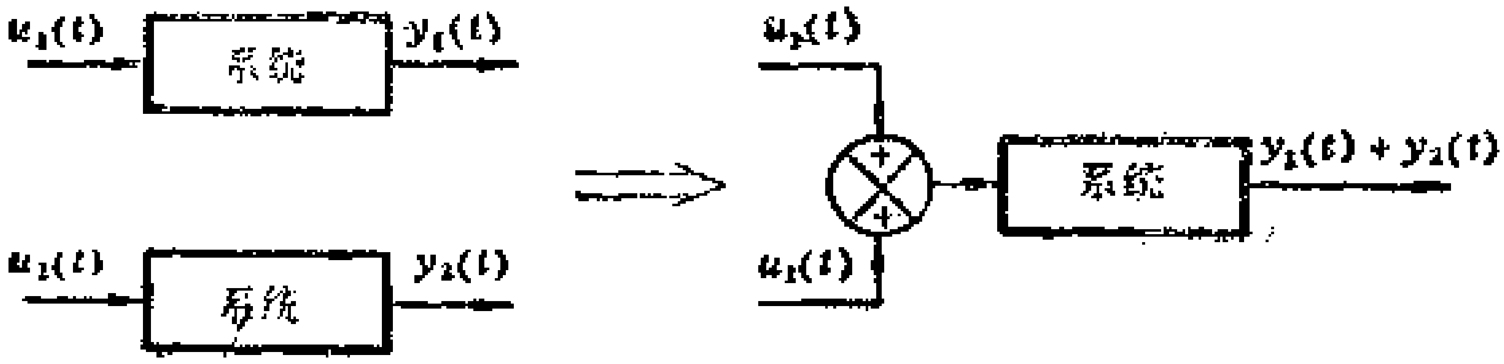
(1) 集中参数系统与分布参数系统：根据系统中元件的物理尺度和输入-输出量的作用范围的比较来分类。两者比较差别很小时，称之为集中参数系统；反之，称之为分布参数系统。

(2) 时变系统与时不变系统：根据系统的结构和参数是否随时间变化来区分。时不变系统也称为定常系统。一般说来，系统都是时变的，时变系统的研究是比较困难的，人们往往先研究时不变系统。

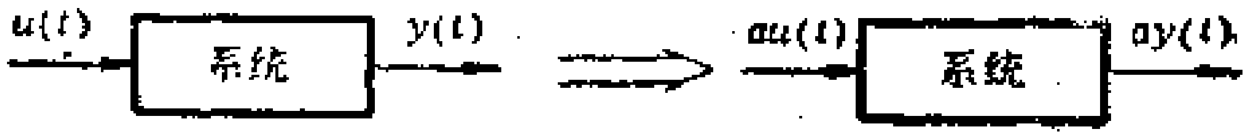
(3) 线性系统与非线性系统：若系统满足齐次和叠加的准则，就称为线性系统。反之称为非线性系统。若将$u(t)$和$y(t)$分别看作某一系统的输入和输出，那么系统的叠加性和齐次性如图 1-2 所示。

一般说来，任何一个系统都不是线性系统为了研究和处理方便起见，常常用线性系统来近似。

(4) 因果系统和非因果系统：当有激励施加于系统的输入时，系统才有输出，否则系统就没有输出，这样的系统被定义为因果系统。反之，称之为非因果系统。大脑由于在不受任何感觉刺激时也总有脑电活动，因此它是一个非因果系统。



(a) 系统叠加性；



(b) 系统齐次性

图 1-2　系统的叠加性和齐次性示意图

(5) 有源系统和无源系统：按系统内部是否有能量供给来区分。这个分类是从电路系统中引申而来。在生物系统中，神经细胞膜就是一个有源系统。

除了上述系统之外，还有很多类型的系统。如自适应系统，学习系统，智能系统等等将在以后的章节介绍。

1.3.3　控制

控制是控制论中最重要的概念。它是和目的性直接相关的，没有目的，就谈不上控制；同样，没有选择，也就没有控制。对一个系统的控制，就是驱动此系统使有效地达到预定的目的。广义地说，控制的目的有两种：一是保持系统原有的状态，使其不发生偏离；二是引导系统的状态达到某种预期的新状态。

实现上述控制目的的最初努力是预先计算出可以达到预定目标的、外加的控制作用，然后把它加在该系统上。这种比较原始的方法就是开环控制，它可以定义为：若输出量对系统的控制作用没有影响，则称为开环控制。其框图如图 1-3 所示。

在这一领域中，关于控制的革命性的进步是在蒸汽调节器和电子放大器的研究中被实现。即将系统的实际输出与期望输出或

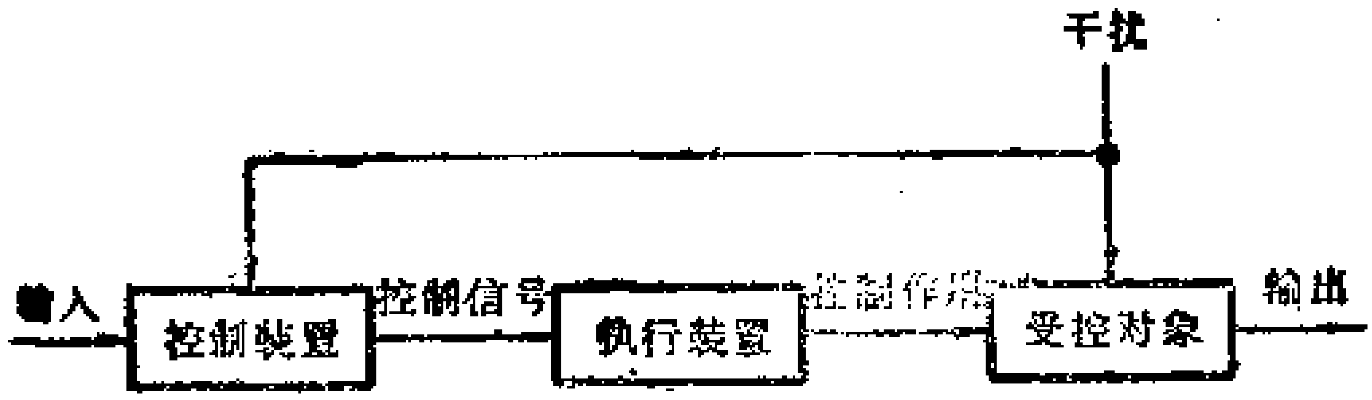


图 1-3 开环控制系统

控制输入函数进行比较并用其差值来调整和操纵系统，这就是所谓的反馈控制，它意味着不用外来的监督而实时地校正操纵作用以达到希望的目标。这种新的控制方法开创了自动化的新时代并导致了现代控制技术的许多新成就。

由于反馈的存在，控制系统形成了闭环，它的框图如图 1-4 所示。

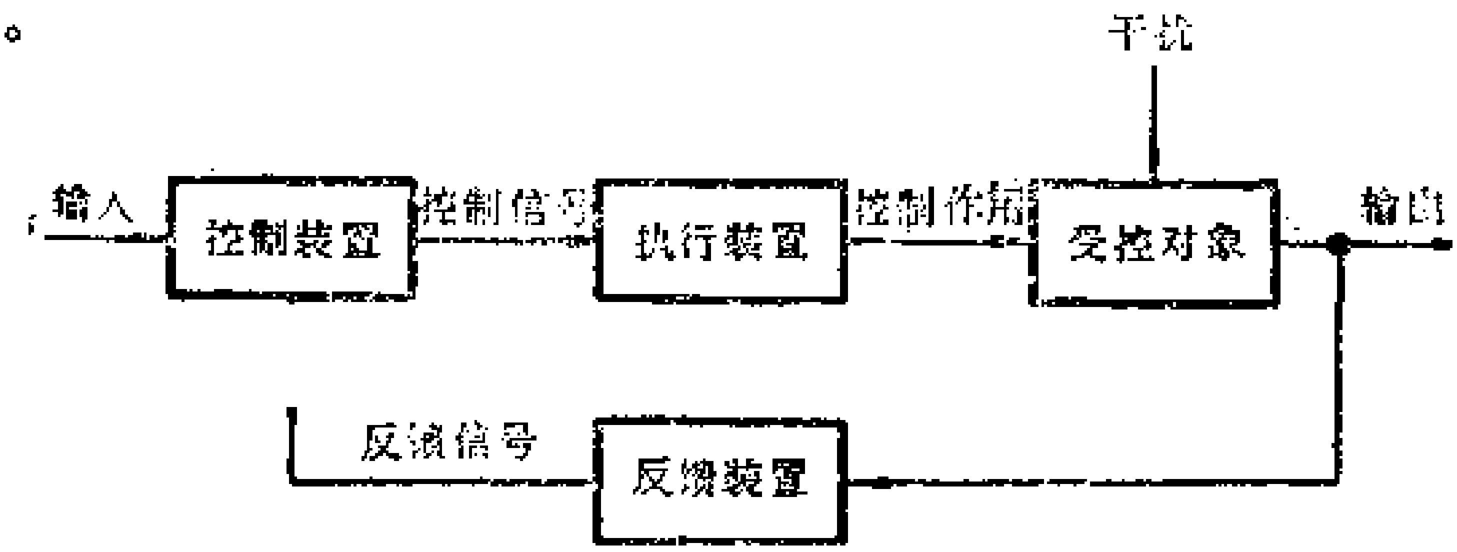
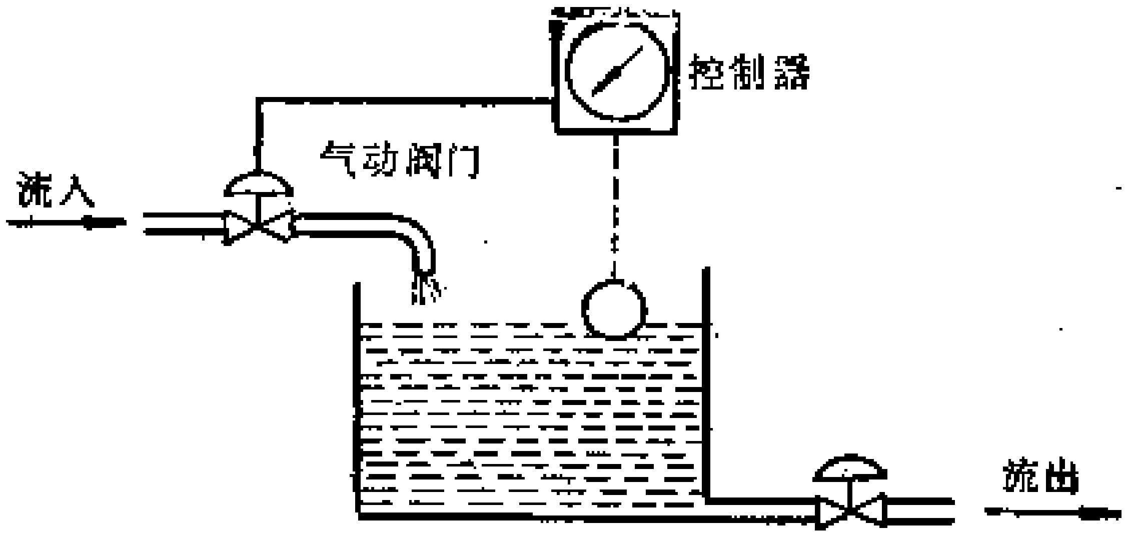


图 1-4 闭环控制系统

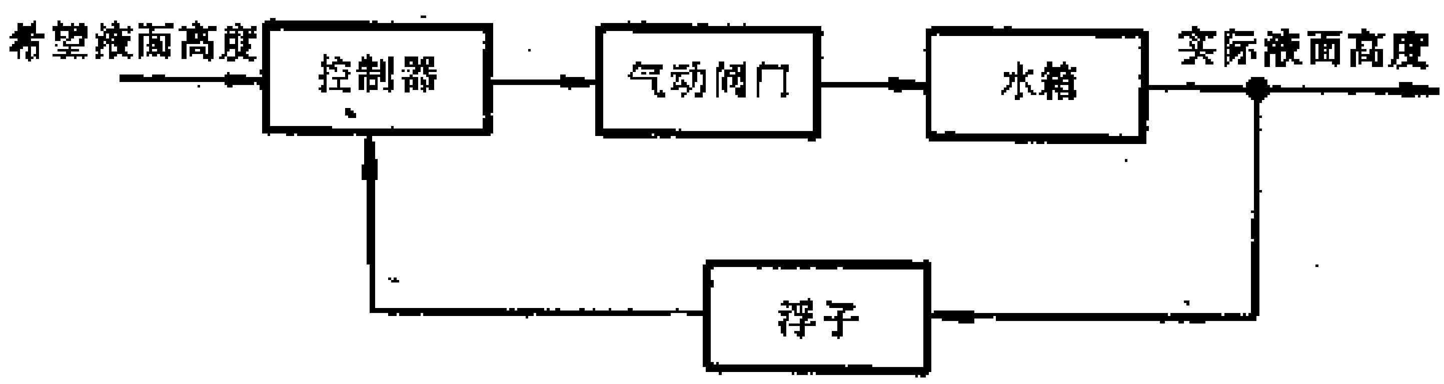
在上述开环和闭环控制系统中，控制对象可以是各种工程、生物、经济和社会系统。它们都是为了达到人们的某种目的而接受控制。控制装置将因对象而定，在工程控制系统中，有自动调节装置、控制计算机等；在生物控制系统中，有各级中枢神经，如延脑心血管中枢、呼吸中枢等；在经济控制系统中，有处理经济信息的电子计算机等等。控制装置接受外界输入信号及反馈信号，进行比较、分析、判断、处理，然后作出决策，向执行装置发出适当的控制信号或指令。执行机构接受来自控制装置的信号或指令，并进行功率放大、能量交换，产生相应的控制作用并施加到控制对象上，如液位调节系统中的气动阀门、血压调节系统中的心肌、血管平滑

肌等。反馈装置用来观测控制对象的输出或被控制量，并进行适当的处理产生反馈信号，将其送入控制装置。

为了说明上述概念，考察如图 1-5 所示的液位控制系统。在这个系统中，自动控制器将实际液位高度与希望液位高度进行比较后，经过调整气动阀门的开度，对误差进行修正，从而保持液位高度不变。



(a) 系统示意图



(b) 系统方框图

图 1-5 液位控制系统

开环系统具有构造简单、维护容易、成本低等优点。当输出量难于测量，或者要测量出输出量需化费高昂代价时，采用开环系统比较合适；但是，由于开环控制是按照事先拟定好的策略进行控制，一旦扰动或给定值发生变化时，系统的输出量将偏离希望的值，甚至造成很大的误差。闭环控制由于是根据受控量的实际情况来进行控制，因此对于受控量的偏差，在很大程度上能予以纠正，但是，在时间上有一定的滞后，这种滞后有时会产生振荡及不能令人满意的现象。

与闭环控制中的反馈概念相对应，在开环控制中有所谓“前馈”的概念，这是指根据输入信息来计算反应并作出校正，有时它可以根据某一模型来预测。在实际的控制系统中，往往采用开环和闭环控制相结合的方法或采用前馈和反馈相结合的复合控制方法。

反馈的概念是维纳控制理论的核心概念，维纳等人首先深刻地认识到，反馈是机器和动物中控制的共同特性。即使像拾起铅笔这样一类的随意运动，也离不开反馈的作用。维纳关于控制概念的高明之处在于：它不是从传统的、孤立的观点去分析和处理系统的控制问题，而是抓住一切通讯和控制系统所共有的特点，站在一个更概括的理论高度，综合了不同领域控制系统的特点和理论，并加以类比，从中抽象出具有普遍性的规律。

2 控制论的科学基础

控制论是一门综合性的学科，在其产生和发展的进程中，涉及到许多科学分支。诸如数学、逻辑学、语言学、哲学和心理学等等。这些学科的理论构成了控制论的科学前提和基础。本章将对几个主要学科中的某些分支作简单的介绍，为读者学习以后几章提供必要的准备。

2.1 统计数学

控制论与数学的关系极为密切。对于一个动态系统，一般都能用一组相应的微分方程或随机微分方程来描述。在这样的数学框架下，数学分析，微分方程，泛函分析，微分几何和统计数学等等都被引入控制论，有人甚至把控制论定义为"信号和机械控制的数学理论"。本节中仅对统计数学中的一些基本概念作一介绍，叙述将是非常简略，其详细内容可以参见统计数学的专门教材。

统计数学是研究自然界中随机现象的数学规律的一门学科，它主要包括概率论，数理统计和随机过程等部分。由于概率论和数理统计的一些基本内容在大学工程数学中已有详细的论述，以下仅介绍随机过程的一些基本概念和结论。

考察一个随机试验 E，以 E 的一切可能结果为元素所组成的集合称为基本空间，用 Ω 表示。在 Ω 中的一个子集，称为随机事件。子集 A 所确定的事件仍记作 A。事件 A 发生等价于随机事件的结果落在子集 A 中。基本空间 $\Omega\subset\Omega$，称为必然事件；空集 $\phi\subset\Omega$ 表示不可能事件。

例如将一个硬币丢掷两次的随机试验记为 E，观察出现正面还是反面，那么 E 的基本空间为：

$\Omega=\{$正正，正反，反正，反反$\}$。

其中共有四个元素。若以 A 表示第一次掷出正面的事件，那么 A 所对应的子集为：

$A=\{$正正，正反$\}$，

称 A 为随机事件。

如果，我们对每一个事件 A，规定一个实数与之对应，此实数记为$P(A)$，若$P(A)$满足以下三条公理：

公理 1　对任意的事件 A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$。

公理 2　$P(\Omega)=1, P(\phi)=0$。

公理 3（可数可加性）　对两两互斥的事件 $A_1, A_2, \cdots$，有 $P(A_1+A_2+\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots$。

那么，称 $P(A)$ 为概率。因此，概率是一个以全体事件为定义域，以区间$[0,1]$上的实数为值域，且满足以上三条公理的函数。它是以集合为元素的函数，也称为集函数。

所有随机事件的全体称为事件域，用$\mathscr{A}$表示，定义于$\mathscr{A}$上的概率用 $\mathscr{P}$ 表示。因此，在分析随机事件及其概率时，涉及到上述三个要素，即 Ω，$\mathscr{A}$和$\mathscr{P}$。为此，将这三者合起来称其为概率空间，记作$(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{P})$。

在概率论中，主要研究一个或有限个随机变量，但是随着科学技术的不断发展，人们往往需要研究随机变量随时间的变化过程，这就需要同时考虑无穷多个随机变量，或者说一族随机变量，由此就产生了随机过程的概念及其理论。

在数学上，随机过程定义如下：

给定概率空间$(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{P})$和参数集合 T，如果对每一个$\omega\in\Omega$和$t\in T$，总有一个确定的实数$x\in R$（R 表示全体实数）与之对应，那么这种关系就称为一个随机过程。因此，随机过程可记为：$x=x(\omega, t), \omega\in\Omega, t\in T$。

由上述定义可以看出，随机过程是二个自变量的函数。当 t 固定时，$x(\cdot, t)$是随机变量；而对应于确定的 ω，$x(\omega, \cdot)$是一个时间的函数，称为过程的一个实现，一个样本函数。因此，随机过程概念是普通函数概念的推广，将普通函数的概念从实数到实数的对

应推广到实数与随机变量的对应；同时它也是随机变量概念的推广，它将随机变量的概念从 w 与实数的对应推广到 w 与实函数的对应。若将随机变量 $x(w)$ 就写为 x，则随机过程可简写为：

$$\{x(t), t\in T\}。$$

习惯上，将 T 称为参数空间，将 $x(t)$ 所能取值的集合，记为 $\mathscr{X}$，称为值域或状态空间。根据 T 和 $\mathscr{X}$ 的不同类型，随机过程可以分为以下类型：

(1) $T,\mathscr{X}$ 皆离散；

(2) T 离散，$\mathscr{X}$ 非离散；

(3) T 非离散，$\mathscr{X}$ 离散；

(4) $T,\mathscr{X}$ 皆非离散。

［例2-1］ 某电话机在 $[0,t)$ 时间内接到的呼叫数是个随机变量，如果要了解总机的工作情况，就要研究呼叫次数随时间变化的过程。对每一个固定的 t，$[0,t)$ 内的呼叫次数是一个随机变量，当 t 连续变化时就是一族随机变量。这是一个 T 非离散，$\mathscr{X}$ 离散的随机过程。

［例2-2］ 某公共交通线路上每一个站的上、下车人数之差是一个随机变量，要了解这条线路上的客流变化情况，就要研究各站的上、下车人数。此时，参数空间是有限集 $\{1,2,\cdots,n\}$（设有 n 个站），状态空间是全体整数，所以这是一个 T 和 $\mathscr{X}$ 皆为离散的随机过程。

令 $\{x(t), t\in T\}$ 为一个随机过程。假定多维随机变量 $x(t_1), x(t_2),\cdots,x(t_k)$ 对任何的 k 和任意的 $t_i\in T$ 能指定一个概率分布，具有分布函数

$$F(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k;t_1,t_2,\cdots,t_k)$$
$$=P\{x(t_1)\leqslant\xi_1, x(t_2)\leqslant\xi_2,\cdots,x(t_k)\leqslant\xi_k\} \qquad (2\text{-}1)$$

分布函数满足对称性和相容性条件，那么称该分布函数为随机过程的有限维分布。

对称性条件表示 F 对于所有的对 (ξ_i,t_i) 是对称的。相容性条件可表示为：

$$F(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{k-1};t_1,t_2,\cdots,t_{k-1})$$
$$=\lim_{\xi_k\to\infty}F(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k;t_1,t_2,\cdots,t_k)。\quad (2\text{-}2)$$

由此可知，一个随机过程有一个有穷维分布函数族。反之，由一个有穷维分布函数族是否能定出一个随机过程呢？1931 年柯尔莫哥洛夫证明了可以由一个满足对称性和相容性的分布族唯一确定一个随机过程。

与随机变量相类似，随机过程可定义均值函数和协方差函数。均值函数定义为 $m(t)=Ex(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\xi dF(\xi,t)$；

$x(s)$与$x(t)$的协方差函数为：

$$\operatorname{cov}[x(s),x(t)]=E\{[x(s)-m(s)][x(t)-m(t)]^T\}$$
$$\triangleq r_{xx}(s,t),$$

式中 E 表示数学期望，$r_{xx}(s,t)$称为自协方差函数，简记为$r_x(s,t)$；$\{x(t),t\in T\}$和$\{y(t),t\in T\}$的协方差函数为：

$$r_{xy}(s,t)=\operatorname{cov}[x(s),y(t)]$$
$$=E\{[x(s)-Ex(s)][y(t)-Ey(t)]\}。$$

在控制论中，如下随机过程特别重要：

平稳过程 对于任意的正整数 n，任意的 $t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$ 及实数 τ，当 $t_i+\tau\in T(i=1,2,\cdots,n)$时，总有 $x(t_1),x(t_2),\cdots,x(t_n)$ 的分布等于 $x(t_1+\tau),x(t_2+\tau),\cdots,x(t_n+\tau)$的分布，则随机过程 $\{x(t),\ t\in T\}$ 称为是平稳过程。若只是分布的一阶矩和二阶矩相等，则过程称为弱平稳的。

若样本函数的总体均值等于样本函数关于时间的平均值，则此平稳过程被称为是各态历经的，即对于几乎所有的w，有

$$Ex(t)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t,w)dt。$$

正态过程 若对每一个 k 及所有的 $t_i\in T\ (i=1,2,\cdots,n)$，$x(t_1),x(t_2),\cdots,x(t_n)$的联合分布是正态的，则随机过程称为正态过程或高斯过程。正态过程由其均值和协方差完全确定。

马尔柯夫过程 令 t_i 和 t 为附标集合 T 的元素，且有 $t_1<t_2$

$<\cdots<t_k<t$。若

$$p\{x(t)\leqslant\xi\,|\,x(t_1),x(t_2),\cdots,x(t_n)\}=p\{x(t)\leqslant\xi\,|\,x(t_k)\},$$

其中 $p\{\cdot\,|\,x(t_k)\}$ 表示给定 $x(t_k)$ 时的条件概率，则此随机过程 $\{x(t),t\in T\}$ 称为马尔柯夫过程。

二阶过程 若对所有 $t\in T$，有 $Ex^2(t)<\infty$，则此随机过程 $\{x(t);t\in T\}$ 称为二阶过程，这种过程的均值函数和协方差函数存在。

独立增量过程 设 $t_i\in T(i=1,2,\cdots,n)$，且 $t_1<t_2<\cdots<t_n$，若随机变量 $x(t_n)-x(t_{n-1})$，$x(t_{n-1})-x(t_{n-2}),\cdots,x(t_2)-x(t_1)$，$x(t_1)$ 互相独立，则称此过程 $\{x(t),t\in T\}$ 为独立增量过程。若变量只是不相关，则称其为不相关增量过程或正交增量过程。

独立增量过程可用对任意的 s 和 t 的增量 $x(t)-x(s)$ 的分布和 $x(t_1)$ 的分布予以详细说明。若 $x(t)-x(s)$ 的分布只依赖于 $t-s$，则称此过程具有平稳增量。若 $x(t)-x(s)$ 具有正态分布，则 $\{x(t),t\in T\}$ 称为独立正态增量过程。

维纳过程 这种过程又称布朗运动过程，是一种正态过程。在随机控制理论中，作用于控制系统的许多扰动可用维纳过程来模拟。它可用下述条件来定义：

(1) $x(0)=0$；

(2) $x(t)$ 为正态过程；

(3) 对于所有 $t>0$，$Ex(t)=0$；

(4) 过程具有独立平稳增量。

由于其过程是正态过程，因此维纳过程可用均值函数和协方差函数来完全表征：

均值 $m(t)=Ex(t)=0$；

$x(t)$ 的方差 $\operatorname{var}x(t)=Ct$；

$x(t)$ 的协方差 $r(s,t)=C\min(s,t)$。

其中参数 C 称为方差参数。维纳过程的样本函数以概率 1 连续，然而它却在任一固定的 t_0 上有有穷导数的概率等于 0。

考虑一个弱平稳随机过程 $\{x(t),t\in T\}$，该过程可用其均值 m

和协方差函数 $r_x(\tau)$ 来表征。首先引进协方差函数的傅里叶变换，称其为谱密度，谱密度和协方差函数之间的关系如下：

连续参数时，

$$\phi(w)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iwt}r(t)\,dt;$$

$$r(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{iwt}\phi(w)\,dw;$$

离散参数时，

$$\phi(w)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}r(n)e^{-inw},$$

$$r(n)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{inw}\phi(w)\,dw。$$

然后引进一个特殊的随机过程，称为白噪声。若一个弱平稳随机过程，其谱密度为常数：$\phi(w)=$ 常数，则称其为白噪声。对于离散时间白噪声，有如下性质：

$$r(n)=\begin{cases}2\pi C, & n=0;\\ 0, & n=\pm1,\pm2,\cdots。\end{cases}$$

这表示过程在不同时刻的值是不相关的，如果是正态白噪声，它们之间是独立的。对于连续时间白噪声，因为 $\phi(w)=C$，其方差将不是有限的，可见它不是一个二阶随机过程。

因为常数的傅里叶变换等于具有全部质量都在原点的分布，可以表示为狄拉克 δ 函数，因此形式上其协方差函数可表示为：

$$r(\tau)=2\pi C\delta(\tau)。$$

所以当 $t\neq s$ 时，$x(t)$ 与 $x(s)$ 互不相关。

2.2. 数理逻辑

数理逻辑是从传统逻辑发展而来，从数理逻辑产生的一日起，它就与控制技术有着不可分割的联系。自从亚里士多德逻辑学建立之后，希腊人就试图用某种机械来代替人的思维活动。1642 年物理学家巴斯格创造了历史上第一台原始的数字计算机。1673年

数理逻辑的奠基人莱布尼兹在前人工作的基础上，又制造了一台数字计算机。既然计算可以由机器来实现，那么人们的逻辑推理活动是否也可以用机器来进行呢？这正是逻辑学家和控制论专家共同关心的问题。

在莱布尼兹时代，由于生产力发展水平不高，这种以机器模拟人脑思维活动的研究工作没有能得到迅速的发展，数理逻辑仅仅作为一门理论学科被研究。1847年布尔发表了《逻辑的数学分析》，七年后他又发表了《思维法则的探讨》。布尔是一位数学家，他的目的是要构造一个演绎思维的演算，他认为：逻辑关系和某些数学运算非常类似，代数系统可以有不同的解释，把解释推广到逻辑领域，就可以构成思维的演算。布尔的工作为数理逻辑奠定了基石。继布尔之后，麦柯尔用字母及其组合来表示命题，为命题的形式化作出了贡献，他还提出了蕴含的概念。数理逻辑上的又一突破性成就，是量词和约束变元的引进和研究，它是由弗雷格在《表意符号》(1879年)一文中引进的。布尔，麦柯尔和弗雷格等人的工作使数理逻辑的基础日趋完善，罗素和怀特海的名著《数学原理》的发表标志了数理逻辑的成熟。

数理逻辑一般分为五个分支：逻辑演算、证明论、公理集合论、递归论和模型论。其中，逻辑演算部分既包含古典二值外延系统、非古典的构造性逻辑、多值逻辑、无穷逻辑等，也包含内涵逻辑、模态逻辑、规范逻辑等并非因数学的需要而发展的内容。证明论主要是由希尔伯特创立的，希尔伯特认为各数学分支都可以通过一阶逻辑来形式化。逻辑系统是一组公理和推理法则。从公理出发，利用推理所得到的命题就是定理。这个推导过程就是一个证明。因此，为了证明数学理论的相容性，必须把数学理论彻底公理化。集合论是由康托尔创立，它用严格的数学方法研究无穷数的集合。递归论起源于证明论所创建的算法化方法，它研究判定问题、不可解度问题、计算复杂度问题和能行问题等。其中能行性理论在控制论中起着突出的作用。一类问题所谓是能行可解的，就是说存在某种确定的方法和步骤来判定这类问题中的任一个命题的是或

非。例如，我们要实现某控制过程的自动化，其首要研究的问题是这一控制过程的算法化是否能行的问题——算法描述问题。事实上，大量的控制过程是不可能算法化的，比如不可能找到一种可以解决所有数学定理证明的算法。能行问题的研究为我们揭示了哪一类问题有机械地解决的可能，哪一些问题是不可能解决的。只有能行可计算函数才能由计算机进行计算，从而才能由计算机来实现某些控制功能。模型论主要研究各种模型间的联系，对各种数学理论系统建立模型。所谓数学模型就是建立一个由有限的命题集合和有限规则集合组成的数学体系。

在自动机系统中，一个变量的取值可以仅限于0和1，其物理意义随具体问题不同而各异，这种变量通常称为逻辑变量。其中0和1仅表示两种相互对立的稳定状态，不具有普通数学中的大小关系，它们可以是{真，假}、{开，关}、{通，断}、{合格，不合格}等等。在逻辑变量的基础上，可以构成逻辑函数，逻辑方程等。显然，通常的数学分析方法已不再适用于这类问题，它需要特殊的数学工具。在历史上，布尔首先提出了逻辑代数的理论，因此也称为布尔代数。

可以用公理化方法来定义逻辑代数：

如在集合 $S=\{0,1\}$ 上定义了两种二元逻辑运算：或($\vee$)、与($\wedge$)，一种一元逻辑运算：非(—)。对以 S 为变域的任意逻辑变量 A,B,C，下列六组公理成立：

(1) 交换律：$A\vee B\Longleftrightarrow B\vee A$，$A\wedge B\Longleftrightarrow B\wedge A$；

(2) 结合律：$(A\vee B)\vee C\Longleftrightarrow A\vee(B\vee C)$；

$(A\wedge B)\wedge C\Longleftrightarrow A\wedge(B\wedge C)$；

(3) 分配律：$A\vee(B\wedge C)\Longleftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)$；

$A\wedge(B\vee C)\Longleftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$；

(4) 吸收律：$A\vee(A\wedge B)\Longleftrightarrow A$；

$A\wedge(A\vee B)\Longleftrightarrow A$；

(5) 0-1律：$1\vee A\Longleftrightarrow 1$；

$0\wedge A\Longleftrightarrow 0$；

(6) 求补律：$A\vee\overline{A}\Longleftrightarrow 1$，$A\wedge\overline{A}\Longleftrightarrow 0$。

则集合 S，逻辑运算"∨、∧、－"及它们所遵循的公理作为一个整体，称为逻辑代数。记为：$(S,\vee,\wedge,-,0,1)$。

在上述各式中符号"⟺"表示等价关系。各种逻辑运算可以采用真值表来定义。

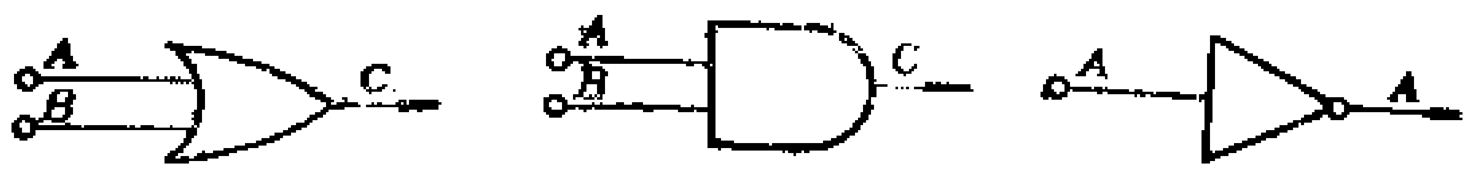
表 2-1

A	B	C
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

设 $\{A,B,\cdots\}$ 为一组逻辑变量，其中每一变量只能取 0 和 1 两种值。在这组逻辑变量中，有以下三种基本运算：

(1) 逻辑加(或运算)：对任意二变量 A 和 B，定义其逻辑加为 C，记为 $C=A\vee B$，C 的值见表 2-1。

由表 2-1 可知，这种运算具有"或"的意思：只要 A、B 中有一个取 1，则 C 就为 1。在逻辑系统中，逻辑加运算常用图 2-1 a 所示的符号表示，称为或门



(a) 或门　(b) 与门　(c) 非门

图 2-1　逻辑门

(2) 逻辑乘(与运算)：对任意二变量 A、B，定义其逻辑乘为 C，记为 $C=A\wedge B$，C 的值见表 2-2。

表 2-2

A	B	C
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

表 2-3

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

由上表 2-2 可知，这种乘法有"与"的含义。故亦称为与运算。其符号如图 2-1b 所示。

(3) 逻辑补(非运算)：

逻辑变量 A 的逻辑补定义如表 2-3 所示，用 $\overline{A}$ 表示 A 的补。

显然，"补"意味着"非"，故而又称非运算，其符号如图2-1c 所示。

由上述三种基本运算，可以派生出多种复合运算。所有这些运算都可以进行物理模拟，可以由晶体管集成电路来实现。

和普通代数运算一样，由逻辑代数运算可以构成逻辑算式，称为组合逻辑。当一个算式中同时含有加法、乘法时，运算的先后次序为先乘后加。也可用加括号的方法，规定运算次序。对于非运算，仍用在变量上加划线的方法表示，它意味着，在横线下的运算完成之后，再作补运算。

容易验证上述三种基本运算是符合逻辑代数定义中的六组公理的。

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 表示n个逻辑变量，x_i 仅取 0 和 1 二个值，由此可以构成二个逻辑代数式 $q_1(x_1, \cdots, x_k), q_2(x_1, \cdots, x_n), (n \geqslant k)$，如果对任何一组自变量$\{x_i\}$的确定值都有 $q_1 = q_2$ 则称 q_1, q_2 为等价关系式，可以互相代换。

利用上述公理中的关系式，可以简化逻辑代数式，以求得逻辑代数式的极小化。由于每一个逻辑代数式都可以用一个相应结构的逻辑网络来实现，因此，这种极小化有其明显的经济意义。

2.3 语言学

语言是人类进行社会活动的最重要工具，以研究人类智能为中心课题的控制论，势必要研究人类的语言。早在维纳提出《控制论》之时，语言学就已成为控制论的科学前提和基础。维纳在《控制论》第八章中以"信息、语言和社会"为题专门论述了有关的思想。随着语言学本身的发展，当今的语言学为控制论所提供的理

论和依据已远非昔日可比，语言学已经成为控制论不可缺少的基础。

作为一门古老的学科——语言学，它主要包括语音学、词汇学、语法学和语义学等几个分支。传统的语言学是以“为语言而研究语言”为宗旨的，很少考虑环境的因素以及它与其他学科中的联系。随着科学的发展和社会的进步，语言学的面貌已经发生了根本的变化，一些陈旧的观念逐渐被更新或抛弃，诸如社会语言学、语用学、心理语言学、神经语言学、模糊语言学和数理语言学等新兴的分支不断出现，使得语言学已经成为一门与多学科交叉的综合性学科。

从控制论的角度看，在语言学中存在着二个关键的问题：其一是人脑与语言的关系，也就是人脑究竟是如何存贮并加工语言信息的？在言语的活动中，人的神经系统是如何工作的？神经系统和语言的关系如何？其二是语言作为一种信息的载体应如何描述和处理，其中包括语言的形式化，语言的数学模型等等。与这二方面密切相关的是神经语言学和数理语言学二个分支，以下对此作一简单介绍。

神经语言学，是一门关于人脑神经与语言关系的学科，它是介于语言学、心理学和神经学之间的一门边缘科学。早在1861年，法国医生布洛卡发现，大脑的某一部位和言语障碍有联系，这一部位被命名为布洛卡区。1874年，德国神经病理学家维尔尼克又发现了大脑中的第二个言语区——维尔尼克区，以后又有所谓“海希尔区”。所有这些大脑的特殊部位都与语言的某些功能障碍有关。例如布洛卡区损伤的病人（称为布洛卡区失语症），说话困难，言语中大都失去功能词，而患有“维尔尼克失语症”的病人，发音虽无困难，言语也能流畅，但话语中缺少内容，枯燥重复。为了进一步探讨语言结构和神经结构之间的关系，语言学家和心理学、神经病理学家相结合，开创了神经语言学这一分支。1975年，苏联心理学家鲁利亚发表了《神经语言学的基本问题》的专著，系统地论述了神经语言学的任务、对象和方法。此书被认为是一部经典著作。

神经语言学一般包括三个主要方面：一是言语交际的神经分析，二是言语形成的神经心理分析，三是理解言语的神经心理分析。通过这三方面的分析，把语言结构、语言习得和语言运用的理论同神经结构和功能的理论联系在一起。如果把言语的形成看成是信息的编码，言语的理解看成是译码，那么神经语言学就是要研究人的大脑在这种编码和译码过程中的机制，这对于搞清人脑在认识过程中的作用，探索人类智能的奥秘有着极为重要的意义。它可为人工智能的模拟和合成提供依据。

神经语言学的研究主要采用实验－发生学方法和实验－病理学方法。其中包括施行外科手术。例如从 40 年代起，美国科学家为了医治患有癫痫症的病人，曾施行了“裂脑”手术，即将大脑两个半球之间的神经联系切断。施行这种手术后的病人曾得到良好的疗效。

通过测试“裂脑人”理解和使用语言的能力，可以发现和研究大脑与语言之间的关系。现在，人们已可不用实施外科手术，通过“脑血流”或“脑波图”的方法，直接了解左大脑的语言区和视觉区在言语活动中的变化。已经证实左、右半脑加工信息的方式有明显的差异，左半球长于逻辑思维，右半球长于形象思维。左半球长于语言和意识，右半球长于辨认和情绪反应。裂脑人由于两个半球之间信息不通，因而出现行动与决策、言与知的矛盾现象。人们的语言交际活动是语言的宏观行为，人脑中的神经心理活动是语言的微观行为，两者有着紧密的联系。

目前，神经语言学的研究成果还不能对语言和人脑的神经系统之间的关系作出完备的解释，但其思想方法及已有的成果已经为研究人类语言乃至智能作出了重要的贡献。控制论专家将从神经语言学中获得“营养”和得到启发。

形式化是数学运算的基础，也是逻辑运算的基础。为了描写信息，申农在提出信息论（通常被称为狭义信息论）时，其首要问题也是使狭义信息形式化，从而使得用数学方法来定量描写信息成为可能。有了这些形式化的基础，数学运算、逻辑运算和信息的处

理才可以自动化。作为人类智能表现的语言活动是否也可以自动化，其首要问题是：语言现象是否也可以形式化和定量化，这就是始于本世纪50年代的数理语言学的研究内容。它是语言学与数学相结合的一门边缘科学。

与数的形式化和逻辑的形式化相比，语言的形式化有其复杂的一面。在言语活动中，人们用不同的词来表达不同的概念。每种语言都有一定量的词汇组成，但是词的任意堆积并不是语言，为了用语言表达思想不仅要掌握词汇，还需要通晓语法和句法。因此，语言的形式化，不仅是词本身的形式，还必须包含词的搭配形式，它们是比词本身的意义更抽象，更概括的东西。意义使词与词相互区别开来，而形式又可以把意义不同的词联合成大大小小的类别。如果说，数的形式是从个别事物的性质中抽象出来，逻辑形式的产生是由于某些思想抽象化的结果，那么语言的形式则是从具体的词和具体的句子中抽象出来。语言形式的最本质特点是，一种语言形式本身不能单独存在，它永远是和其他语言形式联系在一起，充当这种联系链中的一个组成环节。每种语言形式都和其他语言形式有一定的相关性。所有语言要素间的全部形式联系，构成了所谓的语言结构。

数理语言学应用数学的方法模拟自然语言以得到一种近似的语言模型，为语言建立严密的形式系统，只有将自然语言转换成计算机能识别的形式语言，计算机才能对自然语言进行处理（例如翻译）。除了语言形式化的研究之外，数理语言学运用统计学方法研究各种语言单位在语言中出现的统计规律性，并且运用数理逻辑方法制定机器编译系统中的代码语言和代码系统。因此数理语言学为机器翻译、大脑思维模拟、人工智能合成和“人-机对话”等提供有关语言结构的理论和精确资料。

数理语言学所采用的数学方法主要有两种，一是利用数学中的非数值学科方法，例如数理逻辑，算法语言等。二是采用数学中的数值学科方法，例如数理统计、概率论、信息论等。近年来，模糊数学的方法也被用来研究语言，由于语言本身的“模糊性”，使得这

种方法更具有吸引力。

目前，语言学和控制论结合的产物——语言识别和机器翻译系统已经建成。1977年日本研制出能识别46个不同的人所发出的一百个词，并把口语显示在屏幕上。1978年日本制出第一台可以识别几百个单词的连续话语识别装置。欧洲共同体制定的“莱布尼兹”计划，要建立欧洲各种语言的多语机器翻译系统。1984年已完成了法、德、意、英四语机器互译系统。我国在汉字信息处理机，机器翻译等方面也取得了成就。

综上所述，神经语言学和数理语言学是控制论的重要基础。它为研究人的智能和人脑的模拟提供了必要的理论和依据。包括语言学在内的现代科学的深入发展，最终将使人们更清醒的认识自身，认识人类交往的最重要工具——语言。

2.4 生物科学

在控制论的建立和发展进程中，生物科学起了决定性作用。对于控制论学者而言，他们所关注的生物科学问题，乃是人的感觉、知觉、思维和心理活动的生理机制问题，以及这些生理过程与心理过程是否有与自动化过程类似的现象和规律。这些问题的研究，主要涉及神经生理学和心理学。

在维纳提出控制论的时代，生理学和心理学主要是用反射概念来解释人心理活动的生理机制。反射的概念首先是笛卡尔提出的，以后逐渐由谢灵顿、谢切诺夫、巴甫洛夫等逐步明确和完善起来。巴甫洛夫建立了高级神经活动学说。根据这一学说，无条件反射是动物生来就具有的、带有本能性质的反射，例如：胃在进食后开始分泌胃液，人听到呼唤自己名字时要回头张望。条件反射则是动物在后天的生活过程中为了适应不断变化的环境而形成的反射，它与学习有关，是由于在大脑皮层的兴奋灶之间建立了暂时联系时才出现的。当同时有两个刺激因素作用时，在大脑皮层上就会同时有两个部位产生兴奋。如果重复多次，大脑皮层的两个部位间就会建立一定的联系，称其为暂时联系。由于此种联系的

存在，使得只要其中一个刺激产生，大脑皮层中的两个部位就会同时兴奋，从而产生一定的动作反应。这种条件反射现象，已为许多实验所证实。进一步的研究表明，这些反射活动都要通过反射弧来实现。反射弧是由感受器、输入神经元、中间神经元、输出神经元和效应器五个环节构成，如果其中的一个环节损伤，就要影响到反射机能，甚至完全不能实现反射活动。

人的活动基本上是在意识的控制下实现的。完成任何一个动作都具有某种目的，人们都意识到去完成这一行动的原因，并在完成的过程中调节自己的行为。但是人类的全部活动并不都是有意识进行的。例如人不能随心所欲地使自己的脸变白或变红，也不能用意识和意志去控制自己的消化和血液循环。这些过程是由人的大脑皮层的某一部位"自动控制"的。在人的外部器官的动作中，也可以观察到这种"自动性"。例如一个人在集中注意力思考问题时，常会下意识地用笔在纸上涂写，而所涂写的内容与他意识和思考的内容极少关联。如果一个人在吃饭时，也在思考某个问题，那末他会重复机械的动作吃某一个菜，这个菜往往是离他最近的菜。人们还常常会下意识地哼某些歌曲，用鼻子、眼睛或嘴做某些动作。在所有这些情况中，人的动作是没有一定目的，是机械的，或者说是"自动化"的动作。

既使在某些有目的动作中，这种"自动化"的现象也是存在。例如一个空中飞人的杂技表演者，要完成一系列高难度的技巧动作，是需要经过艰苦的训练和顽强的锻炼的，每一个动作的细节都要在意识的控制下练熟，达到准确无误。但是，在熟练的过程中，完成动作所需要的注意力会自然而然地逐渐减少，动作将变得愈来愈机械和自动。对于一个成熟的演员，他想到的只是最后的目的，而不必每时每刻去想他正应当做什么动作，各种动作环节会在不需要人的意识参与下自动交替，这时，人的有意识的活动已经被"自动化"了。显然，只有到达这种"自动化"程度的演员才能登台表演。这种现象在一个熟练的钢琴演奏家或一个熟练的飞机驾驶员的行动中也是存在的。

甚至在人的心理活动过程中，也存在着某种程度的"自动化"的倾向。在看到远处的人、房子或动物时，我们并不感到他们小得像玩具一样，仍旧认为他们如同我们在近处看到的一般大小。这种感觉是一种习惯的结果，使我们能如实地感觉物体，这是一种心理的自动化过程。一个还未养成这种习惯的儿童，他们会感到看到的物体大小就是实在物体的大小。一个成熟的数学教师，假如在解答陌生的题目时，曾经是全神贯注的话，那末在解答大量同类题目时，思维过程就必然会自动地进行。一位棋坛高手，几乎能不加思索地应付对手的各种招势，此时其思维过程也几乎是自动进行。

产生所有上述自动现象的根源就是所谓暂时联系系统。人的活动与外部世界间存在着有规律的联系，一定的外界条件决定人的一定的反应。一切过程都有规律性，这就是人和机器的共同点。人的活动机械性、人的反应规律性及其相对于一定不变的条件的不变性，使得我们可以预见在一定的条件下将要产生的人的心理过程，这为研究人脑与自动机在活动上的共同原理提供了充分的根据。

除了上述反射原理之外，经典神经生理学中的"全或无"("all or none")法则与控制论密切有关。"全或无"现象，首先是由意大利生物学家福塔那(Fontana)于1867年在对心肌的研究中发现的，但并未引起充分重视。以后，由亚德里安(Adrian)在1914～1922年间，再次研究了这一法则。他深入研究了单突触反射弧兴奋传递的电生理机械和理化机制与微观结构的关系，明确提出了神经系统的"全或无"法则，认为这是神经反射活动的普遍规律。"全或无"规律是指：当一个神经元在受到外界刺激后，只要刺激量达到某一阈值，那么就会作出应答，否则，完全不作应答，而且这种应答的信号大小总是一样。神经元的膜电位决定于通过突触所传入的神经脉冲信号的大小及其持续时间。当膜电位达到一定的阈值(约-40mV)，则膜电位发生跃变，出现动作电位，其波高和波宽不变，否则就不出现动作电位。神经元的这种特性，类似于电

路中的继电器特性、计算机中的各种触发器的特性。这使得人们可以用二值逻辑和布尔代数来描述神经网络的活动。这对于制造模拟人脑的计算机控制系统是具有重要意义的。

另一个与控制论有关的重要生理学概念是体内稳态(Homeostasis)概念。这个概念是美国生理学家坎农于1929年提出的。关于这一点我们在上一章曾提到过,它对控制论曾起过重要作用。

坎农认为:"体内所维持的恒定条件也许可以用'平衡'这个词来称呼。但是这个词在用到其中诸力互相平衡的封闭系统中的较为简单的物理化学状态上去时,已经有了相当确切的意义。而维持机体中绝大多数稳态的互相协调的生理过程十分复杂且为生物所特有,它可能涉及脑和神经、心、肺、肾和脾一起协同工作,所以我对这些状态提出一个专门的名称——'体内稳态'。"根据坎农的理论,当动物和人处于一定环境之中时,若环境条件的变化导致机体正常状态的偏离,那么机体内部就必须要有一种能够进行有效调节的机制,使之恢复正常,以维持其与环境的动态平衡。这是人体内存在的自动调节机制,弄清这些规律将有助于对人体功能的模拟,为控制论提供理论和依据。

3　系统的描述

控制论中所研究的系统，视其类别不同，其描述方法也不相同。本章将介绍几种主要的描述方法：时域法、频域法和逻辑法。

3.1　动态系统描述的时域法

时域法是控制论中最早采用的描述动态系统的方法，经历了几十年的发展，这种方法已日趋完善，通常主要有三种：状态方程法，差分方程法和脉冲响应函数方法。由前二种方法描述的系统模型，称为参数模型；由最后一种方法描述的系统模型，称为非参数模型。按照系统是连续型和离散型的区别，状态方程和脉冲响应函数的表现形式也相应地有所区别。

3.1.1　动态系统的状态空间描述

状态最初是物理系统中的一个重要概念。假如我们在某个时刻 t_0 启动了一个系统，并在时间间隔 t_0 到 t_1 内作用于系统一个输入 u，那么系统的相应输出 y 是否被输入 u 所唯一决定呢？一般说来是否定的。例如考察如图 3-1 中所示的二个简单电路，其数学方程如图中所示，其中 $V(t)$ 表示电压，$i(t)$ 表示电流，将电流看作是输入，电压看作是输出。

在图 3-1 a 中，由于电阻是“无记忆力”的，因此，在任意时刻系统的输出完全由输入所决定。但在图3-1 b 中，仅仅知道 t_0 到 t_1 时刻的电流 $i(t)$ 是不够的，还必须知道 t_0 时刻的初始电压 $V(t_0)$，才能唯一决定 $t>t_0$ 时的输出 $V(t)$。

又如一部正在进行数值运算的计算机，它在 t_0 到 t_1 时刻的输出，不仅与输入的数据有关，而且也与在 t_0 时刻计算机内已有什么程序和数据有关。



(a) $V(t)=Ri(t)$ (b) $V(t)=V(t_0)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t}i(\tau)d\tau$

图 3-1 无记忆系统和有记忆系统

由上可知，要确切地描述一个系统，除了要知道系统的输入之外，还需要一个能描述系统内部信息的变量。状态变量就是系统的内部描述。它可以定义如下：系统（或数学过程）的状态是变量的一个最小集合，它包含此系统（或过程）过去的足够信息，使得能够计算未来的性态。表示系统状态的变量称之为状态变量。

设系统用 S 表示，系统的一组输入变量$u_1(t),u_2(t),\cdots,u_p(t)$，输出变量 $y_1(t),y_2(t),\cdots,y_m(t)$和状态变量$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$用如下向量表示：

$$u(t)=(u_1(t),u_2(t),\cdots,u_p(t))^T,$$
$$y(t)=(y_1(t),y_2(t),\cdots,y_m(t))^T,$$
$$x(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))^T。$$

将 $u(t)$，$y(t)$和 $x(t)$在 t 时刻的一切可能值的集合，分别称为输入空间、输出空间和状态空间。

根据上述定义，状态向量与其初值和输入的关系可以写为：

$$x(t)=F[x(t_0);u(t)]。\tag{3-1}$$

输出方程抽象地定义为：

$$y(t)=G[x(t_0);u(t)]。\tag{3-2}$$

上两式中，F 和 G 均是变元的单值函数。如果 S 是用一阶微分方程组描述，通常取如下形式：

$$\dot{x}(t)=f(x,u,u^{(1)},\cdots,u^{(k)},t),\tag{3-3}$$
$$y(t)=g(x,u,u^{(1)},\cdots,u^{(k)},t)。\tag{3-4}$$

其中$u^{(i)}(i=1,2,\cdots,k)$是 u 关于时间的 i 次导数。

利用矩阵和向量记号，线性状态方程可以表示如下：

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \tag{3-5}$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)。 \tag{3-6}$$

其中$A(t)$,$B(t)$,$C(t)$,$D(t)$均为适当维的矩阵值函数。一般的线性离散系统的状态方程表示如下:

$$x(k+1) = G(k)x(k) + H(k)u(k), \tag{3-7}$$

$$y(k) = C(k)x(k) + D(k)u(k)。 \tag{3-8}$$

其中 $x(k)$,$u(k)$,$y(k)$都是在时刻 $t = kT$ 时所确定的向量,$G(k)$,$H(k)$,$C(k)$,$D(k)$表示相应时刻所确定的矩阵。对于随机系统,在方程3-7、方程3-8的右端还将出现随机干扰项, 此时系统是用随机微分方程或随机差分方程来表示。

上述线性系统的状态空间表示, 对于系统的分析是极为有利的。例如在适当的变换下, 可以将式3-5～式3-8中的矩阵化为更为简单的形式。

除了上述用常微分方程描述的系统外, 对于分布参数系统将用偏微分方程来描述。设有如下形式的系统:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(a,u) + F(b,u,t) = 0。 \tag{3-9}$$

其中 A 是偏微分算子,F是关于自变量的非线性函数, u是状态变量向量,t 是时间,a 、b是系统参数向量。

对上述方程,加上适当的初值和边值条件,就得到了一个分布参数系统的完整表示。

对于某些系统,例如化工中的蒸馏塔,在“信息”传递中具有滞后现象, 这时将出现一类特殊的系统:用微分-差分方程描述的系统。这也是一类无穷维系统。其一般表达式如下:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-t_1), \cdots, x(t-t_e))。 \tag{3-10}$$

式中$0 < t_1 < \cdots < t_e$。此时, 其初始条件将不是在某个初始点 $t = t_0$ 时的状态值,而是一个初始区间上的初始函数,可表示为:

$$x(t) = h(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant t_e。 \tag{3-11}$$

这也是一类有广泛应用的系统,如药物在人体内部的分布动态、心肺系统的控制机构、输气管道中压力波的传播和火箭发动机的燃

绕系统中都会出现微分-差分方程描述的系统。

和微分方程表示法相对应的还有积分方程表示方法，通常可分为 Fredholm 型方程和 Volterra 型方程。

此外，还有积分-微分方程表示的系统。凡此种种，不一一介绍，读者可参阅有关书籍。

3.1.2 动态系统输入-输出关系的差分方程描述

对于离散系统除了用状态空间方法描述之外，通常采用差分方程来表示输入和输出之间的关系。考察如图 3-2 所示的单输入-单输出线性时不变系统，其输入 $u(k)$ 和输出 $y(k)$ 之间的关系常用一个 n 阶差分方程来表示：

$$\begin{aligned}&y(k)+a_1y(k-1)+\cdots+a_ny(k-n)\\&=b_0u(k)+b_1u(k-1)+\cdots+b_nu(k-n)。\end{aligned}\tag{3-12}$$

其中$a_i,b_j(i,j=0,1,2,\cdots,n)$为常系数，$n$ 为系统的阶。



图 3-2 单输入-单输出(SISO)离散系统

引入差分平移算子 q，其定义为：

$$q^{-1}y(k)=y(k-1)。\tag{3-13}$$

则式 3-12 可以写为：

$$A_1(q^{-1})y(k)=B_1(q^{-1})u(k)。\tag{3-14}$$

其中，
$$A_1(q^{-1})=1+a_1q^{-1}+\cdots+a_nq^{-n},\tag{3-15}$$

$$B_1(q^{-1})=b_0+b_1q^{-1}+\cdots+b_nq^{-n}。\tag{3-16}$$

对于多输入-多输出系统(MIMO系统)如图3-3所示。



图 3-3 MIMO 系统

其输入和输出关系可以用以下向量差分方程来表示：

$$Y(k)+\sum_{j=1}^{n}A_jY(k-j)=\sum_{j=0}^{n}B_jU(k-j)。\qquad(3\text{-}17)$$

其中，
$$U(k)=(u_1(k),u_2(k),\cdots,u_p(k))^T,$$
$$Y(k)=(y_1(k),y_2(k),\cdots,y_m(k))^T,$$

A_j为$m\times m$维的矩阵，B_j为$m\times p$维的矩阵。上述方程也可写为算子方程：

$$A^*(q^{-1})Y(k)=B^*(q^{-1})U(k)。\qquad(3\text{-}18)$$

其中，
$$A^*(q^{-1})=I+A_1q^{-1}+\cdots+A_nq^{-n},$$
$$B^*(q^{-1})=B_0+B_1q^{-1}+\cdots+B_nq^{-n},$$

I 表示单位矩阵。

如果考虑控制对输出的传输延时，则系统 的方程 3 -14可表示为：

$$y(k)=\frac{B_1(q^{-1})}{A_1(q^{-1})}u(k-l)。\qquad(3\text{-}19)$$

其中 l 表示传输延时。在多输入系 统中，还可以 考虑各输入之间的不同传输延时。

如果不仅考虑传输延时，而且考虑随机干扰，则系统可以写为如下形式：

$$y(k)=\frac{B_1(q^{-1})}{A_1(q^{-1})}u(k-l)+\eta(k)。\qquad(3\text{-}20)$$

其中 $\eta(k)$是一个随机序列。根据随机过程的理论[8]，当 $\eta(k)$为具有有理谱密度的平稳随机过程时，$\eta(k)$ 可以作 为一个特殊动态系统的输出，这个系统可以表示为：

$$\eta(k)=H(q^{-1})e(k)。\qquad(3\text{-}21)$$

其中，$e(k)$是一个平稳过程，且$e(k)$ 的功率谱密度函数为常数，从功率角度看，它的谱在各频率分量上都广泛存在，在频率分量上有相同的功率，所以仿效光学中"白光是能谱在各频率上均匀分布的一种光"的概念，称 $e(k)$为白噪声。这是一类在随机系统描述中，被广泛应用的特殊干扰。上式中的 $H(q^{-1})$可以写成有理形式[8]：

$$H(q^{-1}) = \frac{C_1(q^{-1})}{A_2(q^{-1})}。\tag{3-22}$$

$C_1(q^{-1})$，$A_2(q^{-1})$均为q^{-1}的多项式。

由式3-20～式3-22，可以将系统表示为：

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k-l) + C(q^{-1})e(k)。\tag{3-23}$$

其中，

$$A(q^{-1}) = A_1(q^{-1})A_2(q^{-1}),$$
$$B(q^{-1}) = B_1(q^{-1})A_2(q^{-1}),$$
$$C(q^{-1}) = C_1(q^{-1})A_1(q^{-1})。$$

不失一般性，可以认为$A(q^{-1})$，$B(q^{-1})$，$C(q^{-1})$都是n阶多项式。因为如果这些多项式小于n阶，总可以放些等于零的系数在高阶项中。方程式3-23是用差分方程描写的最常用的被控过程模型。称为CARMA模型。即被控自回归滑动平均模型。作为这种模型的特例，常有如下一些模型方程：

MA模型（滑动平均模型）：

$$y(t) = e(t) + c_1e(t-1) + \cdots + c_ne(t-n)。\tag{3-24}$$

AR模型（自回归模型）：

$$y(t) + a_1y(t-1) + \cdots + a_ny(t-n) = e(t)。\tag{3-25}$$

ARMA模型（自回归滑动平均模型）：

$$\begin{aligned} &y(t) + a_1y(t-1) + \cdots + a_ny(t-n) \\ &= e(t) + c_1e(t-1) + \cdots + c_ne(t-n)。\end{aligned}\tag{3-26}$$

3.1.3 动态系统的脉冲响应描述

考察一个松驰的系统（即系统中的贮能元件没有贮存任何能量的系统），在$t=0$时，输入一个单位脉冲，其输出的响应序列$\{h(i)\}$ $(i=0,1,2,\cdots)$被称为脉冲响应。对于一个离散的线性系统，若其脉冲响应序列已知，则系统的输入和输出关系，可以用如下卷积形式表示：

$$y(k) = \sum_{i=-\infty}^{k} h(k-i)u(i)。\tag{3-27}$$

如果在l个单位时间以后，输出响应已衰减到可以忽略的程

度，则上式可写为：

$$y(k)=\sum_{i=k-l}^{k} h(k-i)u(i)。\tag{3-28}$$

如果系统具有 p 个输入和 m 个输出，那么脉冲响应序列应当变为脉冲响应矩阵，记为$H(k)$：

$$H(k)=\begin{bmatrix} h_{11}(k) & \cdots & h_{1p}(k) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{m1}(k) & \cdots & h_{mp}(k) \end{bmatrix}。\tag{3-29}$$

其中$h_{ij}(k)$表示第 j 个输入对第 i 个输出的脉冲响应。对于这种多输入-多输出系统，可用以下关系表示：

$$Y(k)=\sum_{i=-\infty}^{k} H(k-i)U(i)。\tag{3-30}$$

脉冲响应描述法与差分方程描述法之间有着密切的联系，可以导出差分方程的系数和脉冲响应之间的关系。

对于非线性系统也有类似于上述线性系统的卷积表示形式，这种描述方法是伏尔泰(Volterra)于1959年提出的，称之为伏尔泰级数方法。对于如图3-4所示的SISO非线性系统，其输入和输出关系可以表示成伏尔泰级数形式：

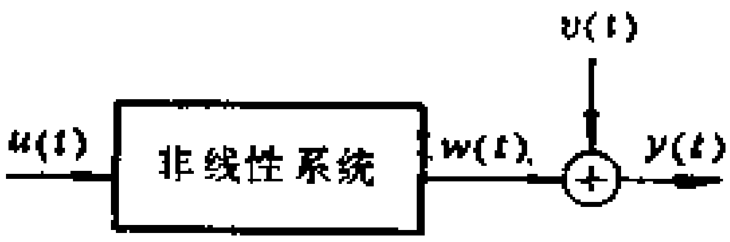


图 3-4　SISO非线性系统

$$w(t)=\int_{-\infty}^{t} g_1(\tau)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{-\infty}^{t} g_2(\tau_1,\tau_2)u(t-\tau_1)u(t-\tau_2)\times \mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2+\cdots+\int_{-\infty}^{t}\cdots\int_{-\infty}^{t} g_n(\tau_1,\cdots,\tau_n)\prod_{i=1}^{n} u(t-\tau_i)\times \mathrm{d}\tau_i+\cdots。\tag{3-31}$$

其中 $g_n(\tau_1,\cdots,\tau_n)$ 称为第 n 级伏尔泰核，它是第 n 项 n 重卷积积分的 n 维权函数。在上式中取第一项时，就是线性系统。

利用伏尔泰级数表示一个非线性系统，可对系统给出物理上的解释，使得在线性系统中的概念和思路推广到非线性系统。对于物理可实现过程，伏尔泰级数的核有如下性质：

(1) $g_n(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n)=0$ 对于$\tau_i<0(i=1,2,\cdots,n)$。

(2) $\lim\limits_{\tau_i\to\infty} g_n(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n)=0,\quad i=1,2,\cdots,n$。

(3) $g_n(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n)$ 是对称的或能被构造成为对称的函数。

对于非线性采样数据过程，可以应用离散形式的伏尔泰级数。若上述非线性系统在有限时间区间上是稳定的，则伏尔泰级数可用它的采样数据形式近似：

$$w(k)=\sum_{i=0}^{p}h(i)u(k-i)+\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{p}h(i,j)u(k-i)u(k-j)$$

$$+\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{p}\sum_{m=0}^{p}h(i,j,m)u(k-i)u(k-j)u(k-m)+\cdots。$$

上式中 $k\geqslant p$，T是采样周期，$t_k=kT$，pT是使系统达到稳定的时间，为了简化，上式中略去了T。于是，

$$h(i)=g_1(iT)T,$$
$$h(i,j)=g_2(iT,jT)T^2,$$
$$\cdots$$

非线性系统的伏尔泰级数描述也是一种非参数描述法。关于它的理论和应用可参见文献[36]。

3.2 动态系统描述的频域法

在控制理论发展的初期，由于控制系统比较简单，人工求解微分方程就可以进行分析。随着控制系统日益复杂，使得人工求解微分方程分析高阶系统遇到了困难，系统的描述采用了一种传递函数的方法，它的数学依据是拉普拉斯变换。由于拉氏变换是将时间域变为频率域，因此人们把这种系统描述的方法称之为频域法。

设一线性定常系统，它的微分方程是：

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots\cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y$$
$$= b_0 x^{(m)} + b_1 x^{(m-1)} + \cdots\cdots + b_{m-1}\dot{x} + b_m x, \quad (n \geqslant m)。\tag{3-32}$$

式中，y 是系统的输出量，x 是输入量。初始条件为零。$y^{(k)}$，$x^{(k)}$ 分别表示 y 和 x 的 k 阶导数。

设 $y(t)$的拉氏变换为 $Y(s)=L[y(t)]$，

$x(t)$的拉氏变换为 $X(s)=L[x(t)]$。

在方程式3-32二边进行拉氏变换，可以得到如下关系：

$$G(s) \triangleq \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1}s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}。\tag{3-33}$$

其中符号“≙”表示“定义”的意思。$G(s)$为式 3-32 线性定常系统的传递函数。

传递函数是一种以系统参数表示的线性定常系统的输入和输出之间的关系，它表达了系统本身的输入-输出特性，而与输入量无关，但是它不能表明系统的物理结构，因为许多物理性质不同的系统，可以有相同的传递函数。

由式 3-33 可以看出，$G(s)$是关于 s 的代数方程。所以，一个动态系统可以用 s 域中的代数方程来表示，这为分析系统带来了方便，它简化了有限维甚至无限维系统的线性模型的计算。在 $G(s)$ 分母中 s 的最高阶数，等于输出量最高阶导数的阶数 n，这种系统称之为 n 阶系统。$G(s)$的分母为零的根称为极点。

在控制论中，常用“方框图”来表示一个系统，这种方框图就是利用了传递函数的一种系统简明表示法。

方框图是系统中每个元件的功能和信号流向的图解表示，它表明了系统中各种元件之间的相互关系，优于纯抽象的数学表达式，因为它能够清楚地表明实际系统中的信号流动情况。只要依据信号的流向，将各元件的方框连接起来，就能构成整个系统的方框图。同时，还可以评价每一个元件对系统性能的影响。

图 3-5 表示了一个方框图单元。

以下用方框图来表示串联、并联和组合反馈的传递函数。



图 3-5 方框图单元

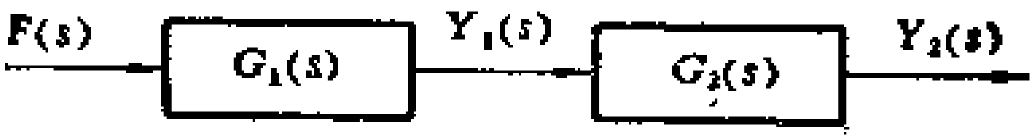


图 3-6 串联传递函数

当传递函数串联时，如图3-6所示。因为

$$Y_1(s)=G_1(s)F(s),$$

$$Y_2(s)=G_2(s)Y_1(s),$$

所以，$$Y_2(s)=G_2(s)G_1(s)F(s)=G(s)F(s)。$$

其中，$$G(s)=G_2(s)G_1(s)。\qquad(3\text{-}34)$$

因此，当传递函数是串联排列时，只要连乘起来就构成了输入和输出之间的总传递函数。

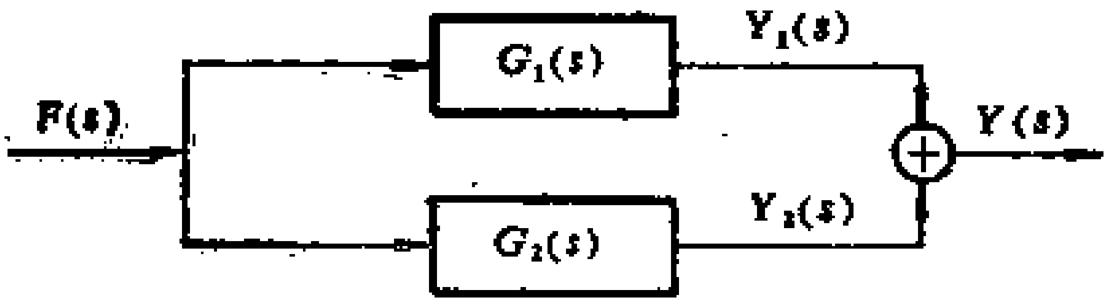


图 3-7 并联传递函数

当传递函数并联(如图 3-7 所示)时，可以得到：

$$Y_1(s)=G_1(s)F(s),$$

$$Y_2(s)=G_2(s)F(s)。$$

又因为，$$Y(s)=Y_1(s)+Y_2(s),$$

所以得到：$$Y(s)=[G_1(s)+G_2(s)]F(s)\triangleq G(s)F(s)。$$

其中，$$G(s)=G_1(s)+G_2(s)。\qquad(3\text{-}35)$$

对于一个比较复杂的反馈系统(见图3-8)，

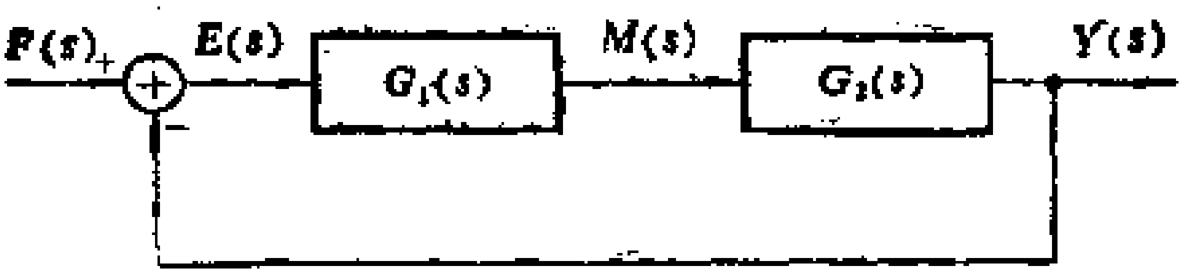


图 3-8 组合反馈传递函数

由图中易知：

$$Y(s)=G_2(s)M(s),$$

$$M(s)=G_1(s)E(s),$$

$$E(s)=F(s)-Y(s)。$$

因此，

$$Y(s)=\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}F(s)。\qquad(3\text{-}36)$$

总的传递函数为

$$G(s)=\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}。$$

由上可知，线性定常系统的传递函数是一个有理分式函数。由解析函数的理论可以知道，除了一些有限的极点之外，有理分式函数在全平面上是解析的，而且它的值完全可以由虚轴上的值来确定。即由 $G(j\omega)$ 可以定出 $G(s)$，反之亦然。因此，$G(j\omega)$ 同样可以表征系统的功能特性，将 $G(j\omega)$ 称为系统的频率特性。

系统的频率特性具有十分明显的物理意义。可以证明，如果将一个正弦信号作为输入信号，作用于一个稳定的线性定常系统，其稳态时的输出也是一个正弦信号，且其频率与输入信号的频率相同，正弦输出对正弦输入的幅值之比等于 $G(j\omega)$，正弦输出对正弦输入的相移则为频率特性在该频率处的幅角。即有如下关系：

$$G(j\omega)=\left|\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}\right|,$$

$$\angle G(j\omega)=\angle\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}。$$

因此，系统对正弦输入的响应特性可直接由 $G(j\omega)$ 求得。

以上对单输入-单输出定常线性系统定义了传递函数，现在，将传递函数的概念推广到多输入-多输出系统，引入传递矩阵的概念。

设有一系统，共有m个输入量和n个输出量。将m个输入量看作为向量的各分量，这一向量称之为输入向量；n个输出量看作是输出向量的各分量。联系输出向量拉氏变换与输入向量拉氏变换的矩阵，称为输出向量与输入向量之间的传递矩阵。

图 3-9 所示的系统为双输入-双输出系统：

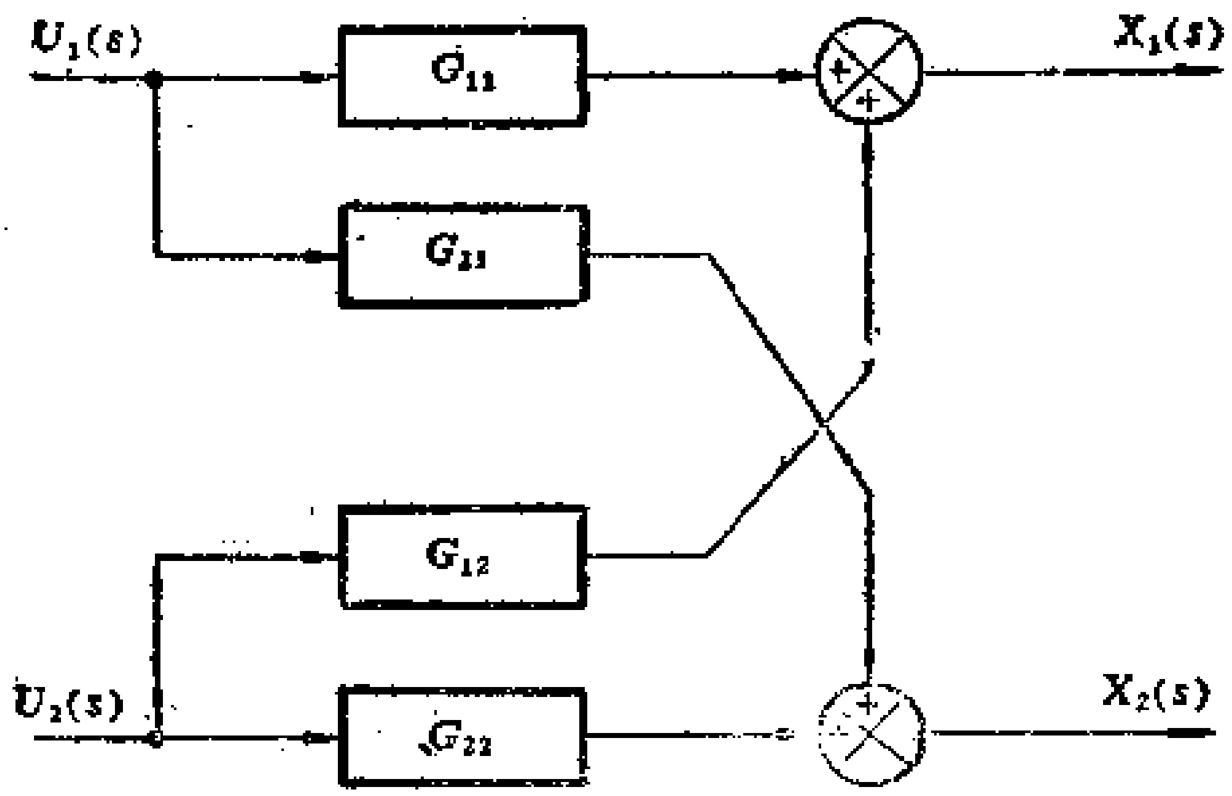


图 3-9 双输入-双输出系统

由图 3-9 易知：

$$X_1(s)=G_{11}(s)U_1(s)+G_{12}(s)U_2(s), \qquad (3\text{-}37)$$

$$X_2(s)=G_{21}(s)U_1(s)+G_{22}(s)U_2(s)。 \qquad (3\text{-}38)$$

式中$G_{ij}(s)$是第i个输出量与第j个输入量之间的传递函数。利用矩阵和向量记号，上式可表示为：

$$\begin{bmatrix}X_1(s)\\X_2(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}G_{11}(s) & G_{12}(s)\\G_{21}(s) & G_{22}(s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_1(s)\\U_2(s)\end{bmatrix}。 \qquad (3\text{-}39)$$

一般地，可以将多输入-多输出系统写成如下形式：

$$\begin{bmatrix}X_1(s)\\X_2(s)\\\vdots\\X_n(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1m}(s)\\G_{21}(s) & G_{22}(s) & \cdots & G_{2m}(s)\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\G_{n1}(s) & G_{n2}(s) & \cdots & G_{nm}(s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_1(s)\\U_2(s)\\\cdots\\U_m(s)\end{bmatrix},$$

可简记为：

$$X(s)=G(s)U(s)。 \qquad (3\text{-}40)$$

其中，$X(s)$ 是输入向量的拉氏变换，$U(s)$ 是输入向量的拉氏变换，$G(s)$ 是 $X(s)$ 与 $U(s)$ 之间的传递矩阵。

如前所述，描述动态系统的频域法是对早期时域法的一种发展。基于这种方法，先后出现了奈奎斯特(Nyquist)、伯德(Bode)的频率法和艾文思(Evans)的根轨迹法，这两种方法不用解微分方程就能分析高阶系统的稳定性，为系统的分析和设计提供了工程上很实用的方法，使得系统的分析由时域法转到了频域法。

然而，这种古典控制理论的频域法只适用于单输入-单输出线性定常系统的分析和设计，随着科学技术的飞速发展，特别是航天技术的发展，控制系统更加复杂，要求控制理论解决多输入-多输出、非线性、及时变系统的设计问题，而且，对控制性能的要求也更高了。在这种形势下，产生了状态空间表示法，这种表示法是60年代发展起来的控制理论的基础。

状态方程的表示方法是一种更为灵活和适用的系统表示方法。它既能用于线性系统，也能用于非线性系统，并可用来分析多输入-多输出的时变系统。控制理论中一些重要的定理，如极大值原理，(或称极小值原理)，都是以这种表示为基础的。但任何事物都有两重性，状态空间的方法也有其本身的弱点，在研究某些问题(如振动问题)时，它不如频域法那样能给出明确的物理意义和概念。近年来，随着电子计算机和控制理论的发展，又出现了一种"现代频率域方法"，这种方法以英国学派(H. H. Rosenbrock 教授等)为代表，导致了控制系统的计算机辅助设计方法的出现。如果说现代控制理论中的状态空间方法是对经典时域法的发展，那么这种"现代频率域法"就是对"经典频域法"的创新。

3.3 系统的逻辑描述法

控制论中研究的系统是多种多样的，除了用微分方程或差分方程描述的物理系统(常称之为动力系统)之外，以数字计算机为中心的逻辑自动机系统，已经广泛地深入到工业、科学、管理乃至人类思维等各个领域。

在工程中，自动机是用来称呼由一些机构和装置组成的这样一种系统，在这个系统中，获取、变换、传输及利用能量、物质和信息的过程，可以不靠人的直接参与而实现。例如，自动机床，自动售货机等等。

在控制论中，自动机是作为一类特殊系统的抽象概念，它通常是指在离散时间内，对离散数据符号进行运算的一类系统，论述这类系统的总的输入-输出行为的学科被称为自动机理论。自动机理论被广泛用于计算机、神经网络、生物系统、工程控制和行为科学等领域，这些领域中的控制系统有一个明显的特点：必须具有逻辑判断能力，能根据系统所获得的各种类型的信息，按预定的逻辑程序作出判断、决策，并发出信号和执行动作的指令，从而达到正确控制受控对象的目的。

3.3.1 时序逻辑系统的描述

一个控制系统中的逻辑过程，一般是随着时间的变化而变化的。这种具有随时间变化的逻辑过程的系统，称为时序逻辑系统，也称自动机。显然，为了描述时序逻辑系统，仅仅利用逻辑变量代数式是不够的，必需研究随时间变化的逻辑变量（或称时变逻辑变量），以及由这些变量所构成的方程，这种方程被称之为时序逻辑方程。

设有一时序逻辑系统，如图 3-10 所示。



$n=0,1,\cdots$

图 3-10 时序逻辑系统示意

输入信号用向量 $u(n)=(u_1(n),\cdots,u_p(n))$ 表示，输出信号用向量$z(n)=(z_1(n),\cdots,z_l(n))$表示，其内部状态用$q(n)=(q_1(n),\cdots,q_m(n))$表示。其中 $u_i(n)$，$z_j(n)$ 和 $q_k(n)(i=1,\cdots,p;\ j=1,\cdots,l;\ k=1,\cdots,m)$均为时变逻辑变量，其值随着 n 的变化而变化。在$t=n$ 的每一瞬间，这三种逻辑变量由下列方程联系着：

$$q(n+1)=f(x(n),q(n);n), \tag{3-41}$$

$$q(0)=q_0, \tag{3-42}$$

$$z(n)=g(u(n),q(n);n), \tag{3-43}$$

$$n=0,1,2,\cdots_{\circ}$$

其中$f=(f_1,f_2,\cdots,f_m)$，$g=(g_1,g_2,\cdots,g_l)$，是向量逻辑函数，即f_i，g_i是自变量的二值函数。q_0是初始状态。

如果式3-41和式3-43等号右端函数不显含n，则称为定常时序逻辑方程（类似于微分方程中的自治系统），它所代表的系统称为定常系统，否则称为非定常。

令I表示所有输入符号的有限集，称为输入集合；Q表示一切可能状态q的全体集合，称为状态空间；Z表示一切输出符号的集合，称为输出集；f为次状态函数；g为输出函数。

因此，一个自动机可以由一个五元组来表示：

$$M=\langle I,\ Q,\ Z,\ f,\ g\rangle_{\circ} \tag{3-44}$$

当状态空间Q中所含的元为有限数目时，则称为有限自动机。

由时序逻辑方程描述的自动机的最简单例子，可以用计算机中的D触发器J-K触发器来代表。例如图3-11所示的J-K触发器。

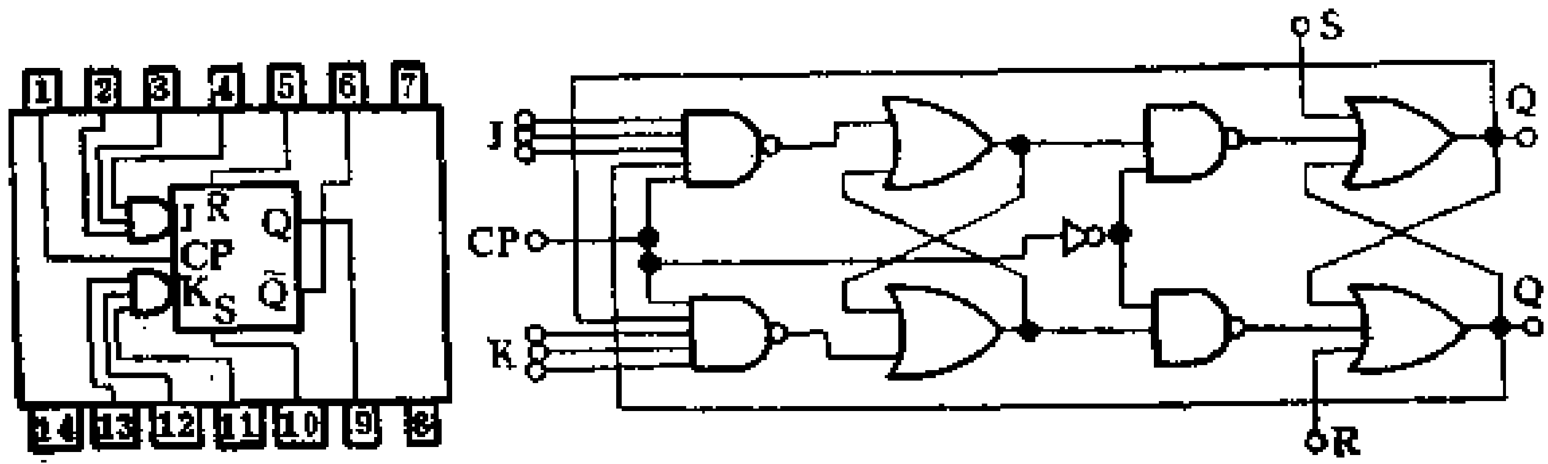


图 3-11　J-K 触发器的封装符号和逻辑图

一个时序自动机一般可以有图3-12所示的框图。它既能在时钟脉冲作用下同步工作，也能作为普通触发器作非同步工作。在非同步工作时的情况见表3-1。它可由如下时序逻辑方程描述：

$$Q(n+1)=\overline{K}(n)Q(n)+J(n)\overline{Q}(n)_{\circ} \tag{3-45}$$

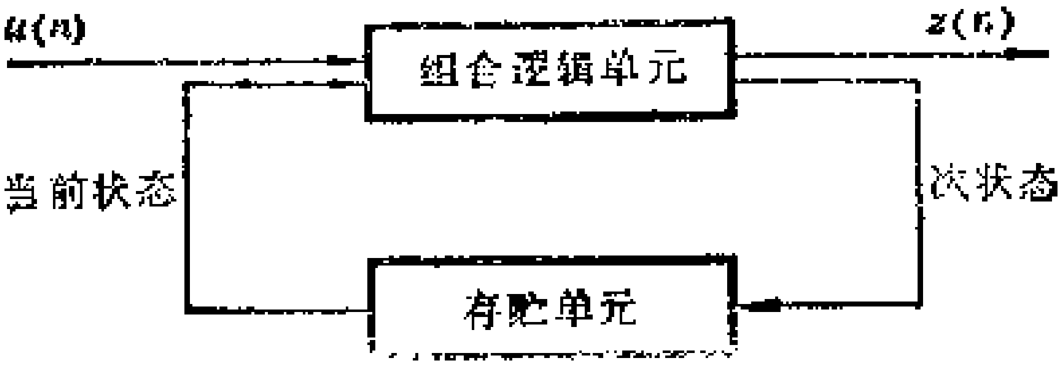


图 3-12 时序自动机的一般框图

表 3-1

J	K	Q(n+1)
0	0	Q(n)
0	1	0
1	0	1
1	1	$\overline{Q}(n)$

除了用上述时序逻辑方程来描述自动机外，对于定常有限自动机还可以用列表法或图示法来形象地表示。例如可以用“输入树”和“状态树”来表示输入和状态的变化。有关的内容，可参阅关于自动机理论的书籍。

3.3.2 图灵机的描述

在各种控制系统中所进行的有目的的信息加工运算，都可以看成是一个有次序的运算序列，确定这种运算的内容和序列的指令称为算法。例如解代数方程和微分方程、根据给定的逻辑函数设计逻辑自动机等等，都是算法。一个十分重要而有趣的问题是：任何算法是否都可以借助于自动机来实现？

在数学中已建立了关于算法的一般理论，现在已经证实，对于大多数最复杂的题目来讲都有算法可寻，能把这些题目分解成一系列简单问题的计算。而且，可以证明，在原则上，任何确定了的算法都可以用离散自动机来实现，然而并不一定能用有限自动机，因为有限自动机的存贮能力是有限的。

1936年英国数学家图灵（Turing）提出了一种自动机的抽象

的状态。当读、写头从带上读出一个符号后，控制器就根据这个符号及当时的机器内部状态，参照程序作出反应，即指挥读、写头进行书写或移动。因此，图灵机可以形象地表示如下：

$$q_i$$
$$\downarrow$$
$$a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{ik}, \cdots, a_{il}$$

其中 $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{il}$ 是磁带上的字 γ，在 a_{i1} 的左侧是伸向无穷的空白带，在 a_{il} 的右侧也是空白带，γ 内也可能含有空白符号，读、写头对准 a_{ik}，内部状态是 q_j。

综上所述，一台完整的图灵机 T 可以定义为如下六元组的形式：

$$T = \langle I, Q, Z, f, g, q_0 \rangle 。 \qquad (3\text{-}46)$$

其中，$I = A \vee b$ 为非空有限符号集（b 为空白，A 为按字母排列的一组字母和符号）；Q 为状态集；Z 为输出集，可表示为：

$$Z = A \vee b \vee r \vee l \vee h, \qquad (3\text{-}47)$$

r 为存储带的右移指令，l 为左移指令，h 为停机指令。f 为时序机的次状态映射；g 为时序机的输出映射；q_0 为计算开始时，时序机的起始状态。一般时序机与图灵机之间的差别在于，图灵机具有潜力无限的外部存储带。图灵机的动作可以分解为 6 个基本指令[4]：

（1） 擦去磁带上的原码。

（2） 写 1 。

（3） 向地址序号增大的方向移动一位。

（4） 向地址序号减小的方向移动一位。

（5） 条件转移：如果磁带上原码为 1 ，则转向第 n 条指令，否则按顺序执行下一条指令。

（6） 停机。

利用这种简单的指令，能够进行各种四则运算和逻辑运算，从而能计算各种复杂问题。然而，图灵机是否能完成人们所规定的一切可能算法，至今仍是一个悬而未决的猜想。

3.3.3 自动机的概率描述

前面介绍的自动机其行为是可以精确预测的，这种自动机称为确定性自动机。但是，在控制论中有必要研究一种系统，其未来状态并不由初态和输入信号唯一确定，系统可以从同一状态和输入变到不同的状态，得到不同的输出值，人们所知道的仅是变为这个或那个状态的转移概率。这种自动机称为概率自动机或随机自动机。

显然，对于这种自动机的描述，必须利用概率语言。布思(Booth)提出了最一般的描述方法[6]，概率自动机可以用如下五元组表示：

$$S_P = \langle I, Q, Z, P, \Phi \rangle。 \tag{3-48}$$

式中，I、Q、Z 的含义如前所述。P 为条件概率的矩阵，Φ 为状态集 Q 有关的所有起始状态的概率集$\{\phi\}$。

为了说明矩阵P 的含义，先引进笛卡尔积符号×，其含义如下例所示：

$$I = \{0, 1, 2\},$$
$$Q = \{a, b\},$$

则

$$I \times Q = \{(0, a), (0, b), (1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}。$$

矩阵P 表示了随机自动机的状态转移和输出行为。矩阵 P 的行对应于输入集和状态集的笛卡尔积所组成的集，其列对应于输出集和状态集的笛卡尔积所组成的集。矩阵 P 的元素 P_{ij} 表示第 i 行所对应的当前状态和输入的条件下，转移到第 j 列所对应的次状态和输出的概率。考察一个简单的双状态随机自动机，其矩阵如图 3-15 所示。其中 $I = \{0, 1\}$，$Q = \{q_1, q_2\}$，$Z = \{0, 1\}$。从图中可见，由输入为 1 和当前状态为 q_1，转移到输出为 0 和次状态为 q_2 的概率为0.5。

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & \multicolumn{4}{c}{Z\times Q} \\
 & (0,q_1) & (0,q_2) & (1,q_1) & (1,q_2) \\
\hline
I\times Q \quad (0,q_1) & 0.2 & 0.1 & 0.3 & 0.4 \\
(0,q_2) & 0.4 & 0.1 & 0.2 & 0.3 \\
(1,q_1) & 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0.1 \\
(1,q_2) & 0.3 & 0.4 & 0 & 0.3
\end{array}
$$

图 3-15　随机自动机的描述矩阵P

应当指出，在同一输入和当前状态下，自动机一切可能转移概率之和必定等于1。因此，上述矩阵各行概率之和为1。

Φ 为与状态集 Q 有关的所有起始状态概率的集合，即：

$$\Phi=\{\phi=[\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_n]\}。\tag{3-49}$$

ϕ 给出了自动机中 n 个可能状态中的每一个的起始存在概率。

对于随机自动机也可以用解析式来描述。设一个随机自动机可以处于 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 中的任意一个状态，输入值 u 可以取任何值 $u_1,u_2,\cdots,u_m$，而输出值 z 可以取任何值 $z_1,z_2,\cdots,z_l$。用 $q_j(i-1)$ 表示在 $i-1$ 时刻状态取 q_j 值，$u_r(i)$ 表示在 i 时刻输入取 u_r 值，用 $P_{jk}(r)$ 表示当状态为 $q_j(i-1)$，输入为 $u_r(i)$ 时，状态转移到 $q_k(i)$ 时的概率。因此，$P_{jk}(r)$ 可以写为条件概率：

$$P_{jk}(r)=P(q_k(i)\mid q_j(i-1),u_r(i))。\tag{3-50}$$

输出值可以表示为自动机状态的函数：

$$z(i)=f(q(i))。\tag{3-51}$$

此处 $z(i),q(i)$ 表示第 i 时刻的输出和状态。方程式3-50和式3-51完全刻划了随机自动机。

由式3-50可以写出转移矩阵 $P(r)=(P_{jk}(r))$，每一个矩阵 $P(r)$ 都对应于一个固定的输入 u_r，有多少不同的输入就有多少矩

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & \multicolumn{4}{c}{q^i} \\
 & q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\
\hline
q^{i-1} \quad q_1 & p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\
q_2 & p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
q_n & p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn}
\end{array}
$$

阵矩阵各行满足：$\sum_k P_{jk}=1$。

随机自动机的概念对于控制论是极为重要的，它可以作为自适应和学习系统的模型、不可靠部件组成的系统模型、生物学和心理学及社会学中系统的模型。例如一位象棋手的下棋过程，可以作为随机自动机来描述。

著名生物学家格·孟德尔（Gregar Mendel）在阐明遗传定律的经典著作中（1865年），使用了白豌豆和紫豌豆。他证实颜色基因具有两种变体——紫色的A和白色的a，变体A是显性基因；基因Aa给出紫色，这和基因型AA一样。在杂交时等位基因的一切可能组合，都应当看作是等可能的。如果将一株植物后代的基因型序列看作一台随机自动机的状态，花的颜色作为输出信号，把第二个亲本的基因型看作输入信号。那末，可写出这台随机自动机的转移概率矩阵，以及输出信号对机器状态的依赖关系。

由于输入有三种情况：$u_1=AA$，$u_2=Aa$，$u_3=aa$可得如下三个矩阵：

$u_1=AA$时，

$$
\begin{array}{cc}
 & \overbrace{\begin{array}{ccc} AA & Aa & aa \end{array}}^{q^t} \\
q^{t-1}\left\{\begin{array}{c} AA \\ Aa \\ aa \end{array}\right. &
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{array} = p(1),
$$

$u_2=Aa$时，

$$
P(2)=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},
$$

$u_3 = aa$时，

$$P(3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}。$$

令 z_1 表示紫色，z_2表示白色，则输出信号对状态的依赖关系见表3-2。

表 3-2

$q(j)$	AA	Aa	aa
$z(j)$	z_1	z_1	z_2

4 系 统 辨 识

4.1 系统辨识问题

系统辨识是控制论中的一个重要分支。系统辨识的英文名称是“system identification”，也可以译为“系统识别”或“系统测辨”。粗略地说，系统辨识就是要辨别和认识系统。关于系统辨识的精确定义却有多种，目前比较通用的是查德(Zadeh)在1962年给出的一个定义：“系统辨识是在输入输出的基础上，从一类系统中确定一个与所观察的系统等价的系统。”这里所谓的等价是指在某一指定的准则意义下的等价，这个定义基本上反映了辨识问题的实质，所以被许多文献所引用。

在控制论中，一个被研究的客体或系统，往往被称为“黑箱”、“灰箱”或“白箱”。“黑箱”通常是指这样一个系统：它有输入和输出，并实现一定作用和功能，但不知道系统的内部结构。“白箱”是相对“黑箱”而言，“白箱”乃是“全知的黑箱”即其内部结构完全已知的系统。显然，“灰箱”可以看成是“部分白”和“部分黑”的系统，也就是在“灰箱”中，具有关于实现输入-输出关系的系统内部结构的部分知识。

从哲学的观点看，系统的“黑”、“灰”和“白”，实际上是个认识论问题。客观的事物无所谓“黑”、“灰”、“白”之分，而人的认识却有一个不知和知，知之不多与知之较多的问题。因此，系统的“黑”、“灰”、“白”是相对于人这个认识主体而言的。在经历了一番调查研究、科学实验和科学分析之后，人们对某个系统的认识也就由浅入深，由表及里，系统由“黑”转化为“灰”或“白”。可见，由人的认识的相对性可以推知上述系统分类方法的相对性。

显然，作为“白箱”的系统是不需要辨识的。与“黑箱”和“灰

箱”相对应，系统辨识问题可以分为完全辨识问题和部分辨识问题。所谓完全辨识问题，是指在完全不了解系统的任何基本特性的前提下辨识系统。例如，系统是线性还是非线性、是有记忆还是无记忆等等均不知道。这类系统在生理学研究中最常碰到。当然，这是一个很难的问题。所谓部分辨识问题，是指在这类问题中系统的部分特性已知，例如系统是线性的，但系统的某些参数未知或阶次未知，那末，辨识问题仅仅是估计参数和阶次。对于大多数实际系统，人们多少知道一些系统的特性或结构，所以系统辨识问题大部分属于部分辨识问题。但是，随着人类对客观世界研究的不断深入，完全辨识问题也愈来愈引人注目。

一般地说，对于动态系统的辨识包含二个主要方面：一是根据动态系统的输入和输出数据确定系统的结构或阶，二是估计动态系统数学模型中的未知参数。具体地说，系统辨识的一般步骤可如图 4-1 所示。从图中可以看出，系统辨识可以分为四个步骤：

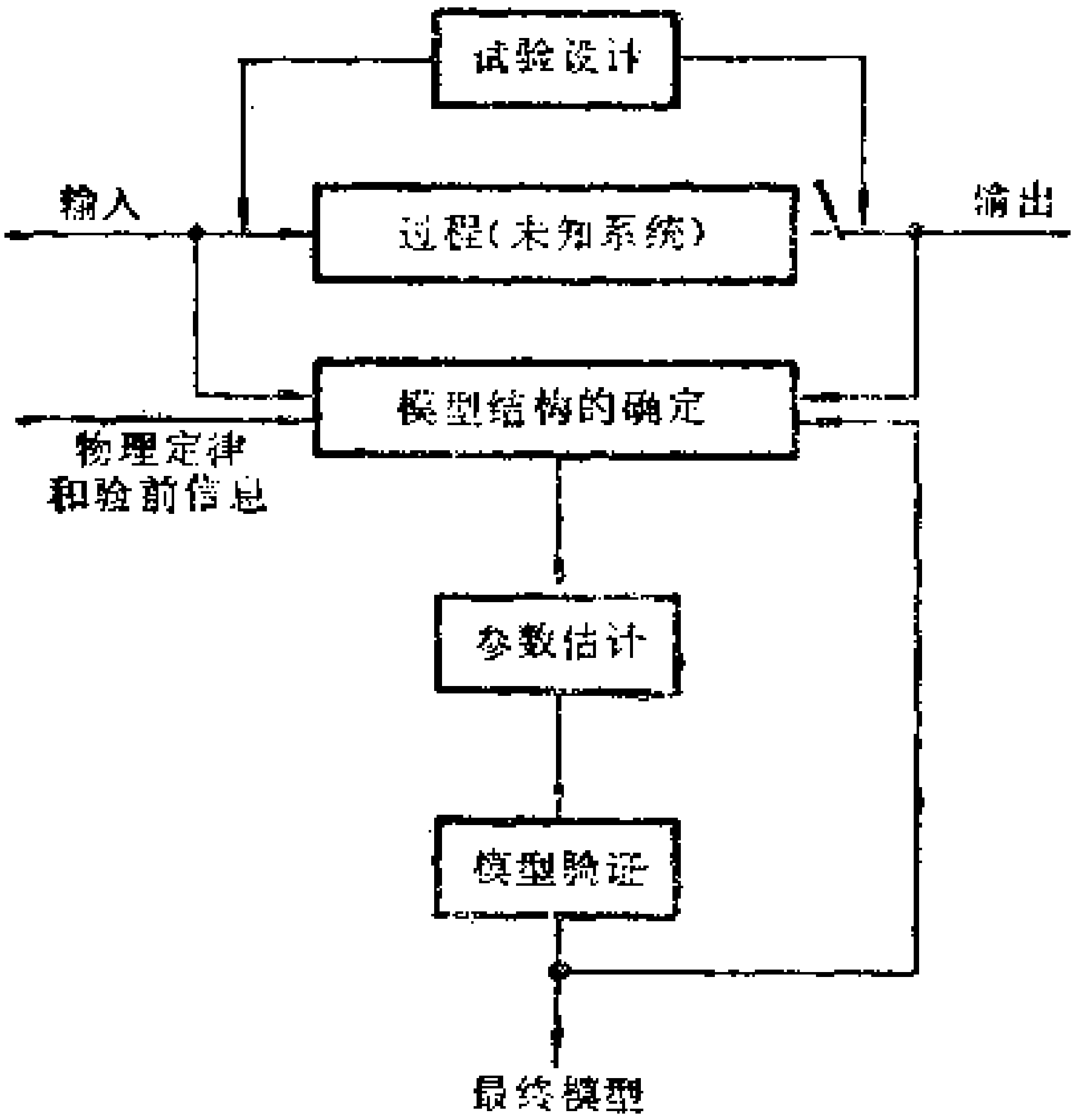


图 4-1　系统辨识的步骤

(1) 试验设计。它的目的是在允许的限制条件下，将适当的

输入信号作用于未知系统(或部分未知系统)，以使其输出信息中包含能反映系统本质特性的最大信息量。从数学上看，就是要选择适当的输入函数，以使某目标函数极小化。动态系统辨识的试验设计问题是一个比较困难的问题，对于“灰箱”系统已有一些比较系统的研究，而对于非线性系统结构辨识的输入试验设计问题是十分困难的，它需要应用信息论，突变论等知识。

(2) 模型结构的确定。对于“灰箱”系统，人们可以依据某些物理的科学定律和验前的知识，推导或归纳出一个初步的模型结构；对于“黑箱”系统，可以依据输入和输出的数据序列，利用分析、归纳、推理的方法，寻找出“黑箱”的内部联系，从而得出一个初步的标准表达式，作为模型的结构表示。有了初步的模型结构，经过如图 4-1 所示系统辨识过程的多次反覆，最后确定模型的结构。

(3) 参数估计。它是在模型结构确定的情况下，依据输入和输出的数据，利用统计数学的各种方法来估计参数。这是一个具有动态约束的目标最优化问题，它的求解在原则上是可以的，但其实现的困难程度与系统的模型结构和目标函数的形式有关。参数估计是系统辨识问题中研究得比较系统和成熟的部分。

(4) 模型验证。它的目的是为了对被初步确定的模型结构进行验证。如果模型是针对某种工况取得的数据而建立的，那末，就有必要对其他工况、或其它新的试验设计方法来校核已得到的模型。在数学上，它可以用一些统计法则来验证；在实际上，这是一个需要用实践加以检验的问题。因此，模型的验证是人们对于未知系统的再认识，经过多次反覆以求得更准确地认识系统。

上述四个方面是不可分割的有机整体，互相之间都有密切的联系。事实上，它反映了人们认识事物的、辨证的、能动的过程。由于事物本质的复杂性和深刻性，通过系统辨识所获得的系统模型，一般说来，仅是原型的同构象或同态象。所谓同构象是指系统的两个不同模型表达式可以经过一一变换互相转换。对于两个同构的数学模型是互相等价的，人们单从输入-输出上是不能把它们区别开来的。如果在两个模型之间存在一个非一一对应的变换，将其

中一个模型变换为另一个模型，那末，另一个模型便是前一个模型的同态象。同态的模型往往是一个简化的模型。

经验表明，通过系统辨识，人们往往找到了原系统的同构或同态系统，这虽然与真实系统有一定的差异，也许还不足以给出十分可靠的结果，但它毕竟使人们对系统的认识前进了一大步，提供了一个在一定范围内有实际用途的系统模型，这对于实现系统的控制无疑是重要的。而且，对于诸如生物一类的系统，甚至还得不到同构象。因为生物系统太复杂了，人们通常最多能找到它的简化模型——同态象。至今为止，还没有任何一种生物系统被一个模型所完全替代，人们还无能力按其原来的复杂面貌加以全面的研究。著名控制论专家艾什比曾经说到："在研究生物方面的系统时，我们就有理由，而且也不得存心不把所有可能分辨的状态都分辨清楚，而且存心地把一个能动系统换成它的同态系统而只研究后者"。[2]

综上所述，可以看出，系统辨识是在输入和输出的测量数据基础上，利用统计分析或其他理论分析方法来建立系统的数学模型。这种做法之所以可能，是基于如下前提：输入和输出数据中包含了反映系统本质和结构的信息。这正是控制论中"黑箱"方法的观点。然而，是否所有的系统都可以用输入和输出数据来辨识呢？这就是系统的可辨识性问题。关于这个问题，目前已取得了一些研究成果，但还远远没有彻底解决。这不仅是一个理论问题，而且是一个需要实践检验的问题。

4.2 系统的参数估计

一个系统的参数模型，当其结构（表达形式）已经确定之后，系统的辨识问题，就仅仅是参数估计问题。目前，已有许多参数估计的方法，这些方法可以按不同的观点加以分类。

如果从参数估计实施的方式来分，可以将估计方法分为"离线"(off-line)方法和"在线"(on-line)方法两种。粗略地说，离线方法是指数据的采集与参数估计算法的实施可以分别进行，因

此，它提供了在没有任何时间约束的条件下，选择和实施参数估计算法的最大可能性和灵活性。通过多次采集数据和选择适当的算法，离线估计方法一般可获得较高的精度。然而，在许多控制系统中，特别是自适应控制中，系统模型参数的估计必须在很短的时间内完成，以满足控制的需要。这时参数估计将采用"在线"的方法，在这种方法中，数据是不需要贮存的，估计的算法将是递推形式的，数据的采集和计算是依次紧接着进行的，而且为更新估计的参数所需的计算时间与采样周期相比是很小的。在采用"在线"估计的控制系统中，一般不需要专门为参数估计而设置输入信号，此时系统的输入信号将同时起着控制和参数估计的双重作用。

从数学的角度看，参数估计的方法[32]主要有以下几种：

(1) 最小二乘法(Least-squares)。

(2) 广义最小二乘法(Generalized least squares)。

(3) 极大似然估计法(Maximum likelihood)。

(4) 最小方差法(Minimum variance)。

(5) 工具变量法(Instrumental variables)。

(6) 梯度法(Gradient methods)。

(7) 随机逼近法(Stochastic approximation)。

(8) 正交逼近法(Orthogonal approximation)。

上述各种方法都已经被系统和深入地研究，在本节中将介绍最为广泛使用的估计方法——最小二乘法及其递推形式。

最小二乘理论最初是由高斯(Karl.Gauss)为进行行星轨道预测的研究于1795年提出的。这种古老的统计方法，由于其简单实用，至今仍受到重视，并被广泛应用于许多科学领域。在数理统计中所涉及的最小二乘法，一般是与回归分析相联系的，应用于静态系统，且设计的矩阵是确定性的。而在系统辨识中，系统是用差分方程描写的动态系统，其相应的矩阵是随机的。最小二乘估计算法的公式也往往采用递推形式。对于最小二乘估计的收敛性和一致性问题也将显得更为复杂。

为分析最小二乘的一般原理，首先引进向量值函数：

$$f(\theta)^T=(f_1(\theta),\cdots,f_n(\theta))。\tag{4-1}$$

其中，$f_i(\theta)(i=1,\ \cdots,n)$ 是给定区域 $D\subset R^n$ 上的非线性实值函数，若定义目标函数为

$$J(\theta)=f(\theta)f^T(\theta)=\sum_{i=1}^{n}f_i^2(\theta),\tag{4-2}$$

则最小二乘估计问题可以定义为

$$\min_{\theta\in D}J(\theta)=\min_{\theta\in D}f(\theta)f^T(\theta)。\tag{4-3}$$

这就是非线性最小二乘问题的一般形式。关于这个问题的分析，数学上有极为丰富的内容，原则上可以应用最优化的方法来求解，由于其目标函数的特殊形式，可以得到更为简洁的算法。

如果未知的参数 θ 出现在用差分方程描写的动态系统之中，利用最小二乘原理可以导出参数估计的算法。为此，考察如下单输入-单输出离散动态系统：

$$\begin{aligned}&y(k)+a_1y(k-1)+\cdots+a_ny(k-n)\\&=b_1u(k-1)+b_2u(k-2)+\cdots+b_nu(k-n)+\eta(k)。\end{aligned}\tag{4-4}$$

其中 $\{u(k)\}$ 和 $\{y(k)\}$ 分别是实际测量的输入和输出序列，$\{\eta(k)\}$ 是独立同分布的随机变量序列，具有零均值和方差 σ^2。

式4-4可以改写为如下形式：

$$y(k)=\phi^T(k)\theta+\eta(k)。\tag{4-5}$$

其中，$\phi^T(k)=(-y(k-1),-y(k-2),\cdots,-y(k-n),u(k-1),\cdots,u(k-n))$，$\theta^T=(a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n)$。

式4-5还可以改写为如下矩阵和向量方程：

$$Y=\Phi\theta+H。\tag{4-6}$$

其中，

$$Y^T\triangleq(y(1),y(2),\cdots,y(N)),$$
$$\Phi^T\triangleq(\phi(1),\phi(2),\cdots,\phi(N)),$$
$$H^T\triangleq(\eta(1),\eta(2),\cdots,\eta(N))。$$

N 为采样的次数。在上述各系统中 n 称为系统的阶，此处假定 n 为已知(关于 n 的确定见4.3)。

设基于输入和输出观察数据的参数 θ 的估计为 $\hat{\theta}$，因而可得如下模型：

$$Y = \Phi\hat{\theta} + E_{\circ} \tag{4-7}$$

其中 E 称为残差向量，$E^T = (e(1), e(2), \cdots, e(N))$。

选取如下目标函数：

$$J(\theta) = E^T \cdot E = \sum_{i=1}^{N} e^2(i), \tag{4-8}$$

$$J(\hat{\theta}) = (Y - \Phi\hat{\theta})^T (Y - \Phi\hat{\theta})_{\circ} \tag{4-9}$$

于是参数估计问题可以归结为：寻求估计 $\hat{\theta}$，使得由式 4-9 所描述的目标函数 $J(\hat{\theta})$ 极小化。

将 $J(\hat{\theta})$ 关于 $\hat{\theta}$ 求导，可得使 $J(\hat{\theta})$ 为极小的必要条件：

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\theta}} = -2\Phi^T Y + 2\Phi^T \Phi\hat{\theta} = 0_{\circ}$$

所以
$$\Phi^T \Phi\hat{\theta} = \Phi^T Y_{\circ} \tag{4-10}$$

设 $\Phi^T\Phi$ 可逆，则
$$\hat{\theta} = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T Y_{\circ} \tag{4-11}$$

又因为
$$\frac{\partial^2 J}{\partial \hat{\theta}^2} = 2\Phi^T\Phi$$

为正定阵，所以，$\hat{\theta}$ 是使 $J(\hat{\theta})$ 取极小值的点。

在统计学中，式 4-10 被称为正则方程。如果目标函数 $J(\hat{\theta})$ 选为如下形式：

$$J_W(\hat{\theta}) = (Y - \Phi\hat{\theta})^T W (Y - \Phi\hat{\theta}), \tag{4-12}$$

此处，W 是一个对称的正定阵，那末使 $J_W(\hat{\theta})$ 极小化的 $\hat{\theta}$ 值，称为加权最小二乘估计，记为 $\hat{\theta}_W$，其表达式如下：

$$\hat{\theta}_W = (\Phi^T W \Phi)^{-1}\Phi^T W Y_{\circ} \tag{4-13}$$

显然，当 $W = I$（单位阵）时，$\hat{\theta} = \hat{\theta}_{W\circ}$

在上述公式中，可以看出矩阵 Φ 是与系统的输入和输出量有关的，由于式 4-4 中 $\eta(k)$ 为随机序列，因此输出 $y(k)$ 也将是随机序列，所以矩阵 Φ 将是一个随机量的矩阵。

在上述估计公式 4-11 或式 4-13 中，需要矩阵的求逆运算，当 N 很大时，其计算量将非常大并很难计算，以致于容易造成误差。显然，这种估计公式是不能用于在线估计的。为此，需要建立递推估计公式。

引入如下记号：

$$\Phi_N \triangleq \begin{bmatrix} \phi^T(1) \\ \phi^T(2) \\ \vdots \\ \phi^T(N) \end{bmatrix}, \qquad Y_N \triangleq \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix},$$

$P_N \triangleq (\Phi_N^T\Phi_N)^{-1}$，$\hat{\theta}_N$ 表示基于 N 次采样的估计。由式 4-11 可知：

$$\hat{\theta}_N = P_N \Phi_N^T Y_N。 \tag{4-14}$$

因为

$$P_{N+1} = (\Phi_{N+1}^T \Phi_{N+1})^{-1}$$

$$= \left[\begin{bmatrix} \Phi_N \\ \phi^T(n+1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Phi_N \\ \phi^T(n+1) \end{bmatrix}\right]^{-1},$$

所以

$$P_{N+1} = [\Phi_N^T \Phi_N + \phi(n+1)\phi^T(n+1)]^{-1}。 \tag{4-15}$$

为了以下推导，引进矩阵求逆引理[24]：

《引理》 $(A+BC)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(I+CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$ (4-16)

其中 A, B, C 为适当维的矩阵，且假定等式右边各逆矩阵存在。

由该引理可以得到：

$$\hat{\theta}_{N+1} = P_{N+1}\Phi_{N+1}^T Y_{N+1} = P_{N+1}[\Phi_N^T Y_N + \phi(n+1)y(n+1)]$$

$$= \left[I - P_N \frac{\phi(n+1)\phi^T(n+1)}{(1+\phi^T(n+1)P_N\phi(n+1))}\right] P_N[\Phi_N^T Y_N + \phi(n+1) y(n+1)]$$

$$= \hat{\theta}_N + P_N\phi(n+1)y(n+1) - P_N \frac{\phi(n+1)\phi^T(n+1)}{(1+\phi^T(n+1)P_N\phi(n+1))} \times P_N\phi(n+1)y(n+1) - K_{N+1}\phi(n+1)\hat{\theta}_N$$

$$= \hat{\theta}_N + \frac{P_N\phi(n+1)(1+\phi^T(n+1)P_N\phi(n+1) - \phi^T(n+1)P_N\phi(n+1))y(n+1)}{1+\phi^T(n+1)P_N\phi(n+1)} - K_{N+1}\phi(n+1)\hat{\theta}_N。$$

所以

$$\hat{\theta}_{N+1} = \hat{\theta}_N + K_{N+1}[y(n+1) - \phi(n+1)\hat{\theta}_N]。 \tag{4-17}$$

其中，

$$K_{N+1} = \frac{P_N\phi(n+1)}{1+\phi^T(n+1)P_N\phi(n+1)}。 \tag{4-18}$$

由矩阵求逆引理易知：

$$P_{N+1} = \left(I - P_N \frac{\phi(n+1)\phi^T(n+1)}{1+\phi^T(n+1)P_N\phi(n+1)}\right) P_N。 \tag{4-19}$$

其中，初始值 P_0 一般取为：$P_0 = I/\varepsilon$，ε 是一个很小的数，例如 $\varepsilon = 10^{-5}$。

由式 4-17 ～式 4-19 可以利用输入和输出数据来递推计算参数的估计值 $\hat{\theta}_N$。这种形式的最小二乘估计式在系统辨识中是最常用的。

如果动态系统采用状态方程的形式：

$$\frac{dx}{dt} = f(t,\ x(t),\ u(t),\ \theta),\ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4-20}$$

$$x(0) = x_0 \tag{4-21}$$

描述，其观察方程如下：

离散时 $$y(i) = g(t_i, x(t_i), u(t_i)) + \eta(t_i), \quad i = 1, 2, \cdots, N; \tag{4-22}$$

连续时 $$y(t) = g(t, x(t), u(t)) + \eta(t)。 \tag{4-23}$$

其中，$x(t)$ 是 $n \times 1$ 维状态向量，$y(t)$ 是 $m \times 1$ 维输出向量，$u(t)$ 是 $r \times 1$ 维输入向量，θ 为 $p \times 1$ 维未知参数向量，$\eta(t)$ 是测量干扰向量。

对于上述系统，其目标函数如下：

离散时

$$J(\theta) = \sum_{i=1}^{N} (y(i) - g(t_i, x(t_i, \theta), u(t_i))^T W (y(i) - g(t_i, x(t_i, \theta), u(t_i)) \tag{4-24}$$

连续时

$$J(\theta) = \int_0^T [y(t) - g(t, x(t, \theta), u(t))]^T W(t) [y(t) - g(t, x(t, \theta), u(t))] dt \tag{4-25}$$

式中，W 和 $W(t)$ 均为权矩阵。

上述目标函数均为最小二乘的估计准则，若 θ 是 p 维向量，则 $J(\theta)$ 可以想象为 p 维空间中的曲面，我们的目的是为了寻找该曲面上的总体最小值。由于目标函数中状态向量 $x(t, \theta)$ 要满足式 4-20，因此，问题的求解将变得复杂起来。这是一个具有动态约

束的最优化问题，通常可以用最速下降法或拟线性化的方法来求解。

最速下降法是以

$$\theta^{(i+1)}=\theta^{(i)}+\Delta\theta^{(i)} \tag{4-26}$$

为基础对初始值$\theta^{(0)}$实行逐次校正，其中$\theta^{(i)}$表示第i次迭代的参数向量值，$\Delta\theta^{(i)}$是在使$J(\theta^{(i+1)})<J(\theta^{(i)})$条件下，对第$i$次迭代计算所作的校正。利用上述公式反复计算，直到

$$\frac{|J(\theta^{(i+1)})-J(\theta^{(i)})|}{|J(\theta^{(i)})|}<\varepsilon$$

为止。

ε是预先指定的误差限度。这种方法的关键是导出$\Delta\theta^{(i)}$的表达式。可以证明$\Delta\theta^{(i)}$可由以下公式计算：

$$\Delta\theta^{(i)}=-\nu\frac{\partial T}{\partial\theta}\bigg|_{\theta=\theta^{(i)}}\qquad \nu>0 \tag{4-27}$$

令$\theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_p)^T$，则式 4-26 可写成如下分量形式：

$$\theta_j^{(i+1)}=\theta_j^{(i)}-\nu\frac{\partial T}{\partial\theta_j}\bigg|_{\theta=\theta^{(i)}}\qquad j=1,2,\cdots,p \tag{4-28}$$

当目标函数由式 4-24 表示时，$\frac{\partial J}{\partial\theta_j}$可按下式计算：

$$\frac{\partial J}{\partial\theta_j}=2\sum_{k=1}^{N}[y(k)-g(t_k,x(t_k),\ u(t_k))]^TW\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial\theta_j}\right)。 \tag{4-29}$$

其中$\frac{\partial g}{\partial x}$是$m\times n$矩阵，其元素为$\left(\frac{\partial g_c}{\partial x_\lambda}\right)$；$\frac{\partial x}{\partial\theta_j}$为$n\times1$向量，其元素为$\left(\frac{\partial x_i}{\partial\theta_j}\right)$。

令$\lambda_{ij}(t)=\frac{\partial x_i}{\partial\theta_j}$称为状态$x$关于参数$\theta$的灵敏系数。将式4-20二边关于$\theta_j$求导，并假定求导次序可交换，得到灵敏系数方程如下：

$$\frac{d\lambda_{ij}(t)}{dt}=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_l}\lambda_{lj}+\frac{\partial f_i}{\partial\theta_j}, \tag{4-30}$$

$i=1,2,\cdots,n,\qquad j=1,2,\cdots,p,$

$\lambda_{ij}(0)=0$。

其中 f_i 为 f 的分量，x_i 为 x 的分量。

根据上述公式，可以将最速下降法的计算步骤归纳如下：

(1) 设定初始值：$\theta_1^{(0)},\theta_2^{(0)},\cdots,\theta_p^{(0)}$。

(2) 由式 4-20 和式 4-21 求解微分方程的解 $x(t)$。

(3) 根据观察方程是离散或是连续，分别用式 4-24 或式 4-25 计算目标值 $J(\theta)$。

(4) 由 0 到 t_N 对灵敏度方程式 4-30 积分求得 λ_{ij}。

(5) 由式 4-29 计算 $\frac{\partial J}{\partial \theta_j}(j=1,2,\cdots,p)$。

(6) 由式 4-28 对估计值 $\theta_j(j=1,2,\cdots,p)$ 进行修正。

(7) 重复上述计算，直到：

$$\frac{|J(\theta^{(i+1)})-J(\theta^{(i)})|}{|J(\theta^{(i)})|}<\varepsilon。$$

ε 为规定的允许误差值。

这种方法对于随机干扰 $n(t)$ 的特性没有提出任何假设，不论观察方程是离散或连续均可实用，所设计的计算机程序也比较简明，但当 n 或 p 较大时，这种算法收敛所需的时间较长。为此，人们研究了许多新的算法，如拟线性化方法，它的收敛速度将比上述方法快得多。这些算法此处不再详述，读者可参阅有关书籍。

从以上介绍的最小二乘估计方法可见，对于线性系统，可以获得递推算法，而对于非线性系统，一般只能得到迭代算法。关于这些算法的收敛性和一致性（指估计的参数值收敛于参数真值）的分析是比较复杂和困难的，此处不再论述。

4.3 系统的非参数模型辨识

系统非参数模型的辨识方法早在经典控制时期就已发展起来，因此，它也被称为系统辨识的经典方法。这种方法主要包括：频率特性辨识、脉冲响应辨识、阶跃响应辨识和相关函数辨识。由

于依据脉冲响应可以方便地求出阶跃响应和频率响应，本节中将主要介绍脉冲响应函数的辨识(包括非线性系统权函数的辨识)。

从系统辨识的观点来看，采用非参数模型有着一些明显的优点，首先，确定非参数模型所需的先验知识比参数模型少，可以不必考虑在参数模型中的阶次、时间延迟等结构量。对于线性定常系统而言，系统的辨识归结为脉冲响应的辨识；对于非线性系统而言，系统的辨识可归结为伏尔泰(Volterra)核(权函数)的辨识。其次，采用脉冲响应函数这类非参数模型，可以在有噪声的情况下，甚至在信噪比相当少的条件下，获得满意的辨识效果。正是由于这些优点，这种经典的方法目前仍被广泛应用，特别在生物控制论中，系统频率特性和权函数的辨识方法，以及伏尔泰级数的方法仍是主要辨识方法。

4.3.1 线性系统的脉冲响应辨识

考虑一个受随机干扰的线性、因果性的时不变系统，如图4-2所示。图中 $u(t)$为输入信号，$y_u(t)$是系统的实际输出，$y(t)$ 是系统的输出观测函数，其中混有随机噪声 $v(t)$，$g(t)$ 表示脉冲响应函数。由于系统是线性时不变的，因此，作用于系统的一切随机干扰都可以用$v(t)$来代表。

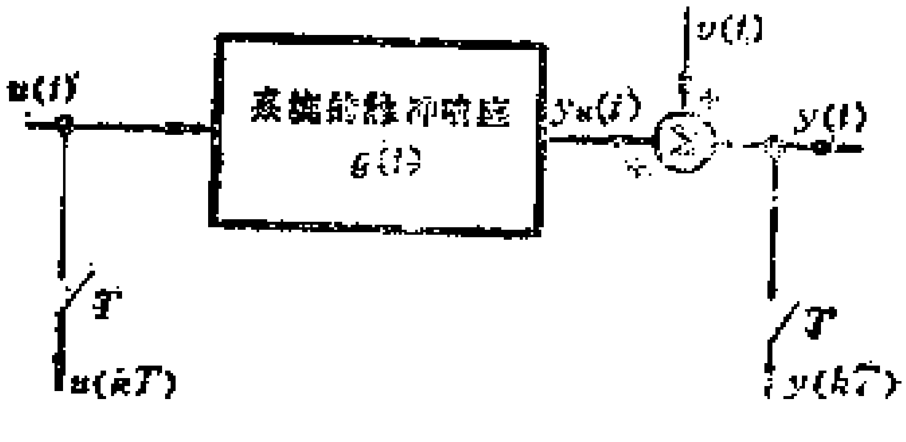


图 4-2 脉冲响应辨识

由第 3 章可知，系统输入和输出之间的关系可以表示为：

$$y_u(t)=\int_{-\infty} g(t-\lambda)u(\lambda)\mathrm{d}\lambda, \tag{4-31}$$

$$y(t)=y_u(t)+v(t)。 \tag{4-32}$$

假定$u(t)$，$y(t)$被一个采样周期为 T 秒的采样器周期性采样，且设T足够小，则 $u(t)$，$y(t)$ 在采样周期内可视为常数，即有：

$$u(t) \approx u(kT),\ g(t) \approx g(kT),\quad kT \leqslant t < (k+1)T。$$

当 $t = kT$ 时，式 4-31 可近似为：

$$y_u(kT) = \sum_{i=-\infty}^{k} Tg(kT - iT)u(iT)。$$

令

$$h(kT) = Tg(kT),$$

则有

$$y_u(kT) = \sum_{i=-\infty}^{k} h(kT - iT)u(iT)。\tag{4-33}$$

假定系统是稳定的，则在有限时间pT后，脉冲响应将近似于零，即为 $t > pT$，时，$g(t) \approx 0$，其中 p 为整数。由式 4-32 和式 4-33 可得：

$$y(kT) = \sum_{k-p}^{k} h(kT - iT)u(iT) + v(kT)。\tag{4-34}$$

则脉冲响应的辨识问题可归结如下：

基于给定的采样数据序列$\{u(kT)\}$、$\{y(kT)\}$及整数p，估计权函数序列$\{h(kT)\}$。从而利用分式

$$g(kT) \approx \frac{h(kT)}{T},$$

可求得脉冲响应序列$\{g(kT)\}$。

为了求解上述问题，假定：

(1) 由 $t = 0$ 开始，获得输入序列的观察值 $\{u(kT)\}k = 0, 1, 2, \cdots, m + p, (m > p)$。

(2) 在时间$p \leqslant k \leqslant m + p$内观察得输出序列$\{y(kT)\}$，$k = p, p+1, \cdots, p+m$。

(3) 噪声 $v(kT)$ 是零均值的随机序列，且 $v(kT)$ 与 $u(kT)$ 不相关。

将观察数据代入式 4-34，可得如下方程：

$$Y = Uh + V。\tag{4-35}$$

其中，$Y=(y(p),y(p+1),\cdots,y(p+m))^T$，

$h=(h(0),h(1),\cdots,h(p))^T$，

$V=(v(p),v(p+1),\cdots,v(p+m))^T$，

$$U=\begin{bmatrix} u(p) & u(p-1) & \cdots & u(0) \\ u(p+1) & u(p) & \cdots & u(1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u(p+m) & u(p+m-1) & \cdots & u(m) \end{bmatrix}。\qquad (4\text{-}36)$$

在上述表达式中，为书写简洁起见，将T略去。

方程式 4-35 的形式与 4.2 中式 4-7 的形式一致，由此可以利用最小二乘估计来求得 h 的估计值 $\hat{h}$：

$$\hat{h}=(U^TU)^{-1}U^TY。\qquad (4\text{-}37)$$

在上述辨识方法中，是把系统输入端的正常输入信号作为测试对象而获取测试数据的。这种作法具有简单和不会干扰系统正常运行的优点，但是却不能保证输入信号能充分激励系统，因此所得测量数据中未必包含反映系统特性的最大相息量。估计精度并非最高。寻求这种最优输入信号的问题正是动态系统辨识中试验设计所要研究的课题。

为了提高辨识的精度，需要外加测试信号，常用的测试信号有阶跃信号，脉冲信号和正弦波信号，但对于某些系统，这些信号干扰太大以致于不能采用。研究表明，以白噪声信号作为测试信号，并用相关分析法来辨识上述脉冲响应，可以收到最好的效果。它能激起系统所有模态的反应，又不会干扰系统的正常运行。

由式 4-36 可得：

$$\hat{h}=(U^TU)^{-1}U^TY=\left(\frac{1}{m+1}U^TU\right)^{-1}\left(\frac{1}{m+1}U^TY\right)$$

$$=H^{-1}G。\qquad (4\text{-}38)$$

其中，

$$H=\frac{1}{m+1}U^TU,\qquad (4\text{-}39)$$

$$G=\frac{1}{m+1}U^TY。\qquad (4\text{-}40)$$

若设$\{u(k)\}$，$\{y(k)\}$是平稳的和遍历的随机序列。定义 m 个点的输入自相关函数和输入输出的互相关函数为

$$\phi_{uu}(k)=\frac{1}{m+1}\sum_{j=i}^{i+m}u(j)u(j-k),\tag{4-41}$$

$$\phi_{yu}(k)=\frac{1}{m+1}\sum_{j=i}^{i+m}u(j-k)y(j)。\tag{4-42}$$

其中 i 是一个任意的正整数，当 m 足够大时，$\phi_{uu}(k)$，$\phi_{yu}(k)$ 几乎不随 i 改变。若 $\{u(k)\}$ 是独立平稳随机信号，则当 $m\to\infty$ 时，$\phi_{uu}(k)$ 变成克朗尼克(Kronecker)δ 函数，即：

$$\lim_{m\to\infty}\phi_{uu}(k)=\phi_{uu}(0)\cdot\delta(k)。\tag{4-43}$$

其中，

$$\delta(k)=\begin{cases}1, & k=0;\\0, & k\neq 0。\end{cases}\tag{4-44}$$

具有上述特性的输入信号乃是一白噪声信号。由式 4-36，式 4-39～式 4-44 易知

$$H^{-1}=\frac{1}{\phi_{uu}(0)}I,\tag{4-45}$$

$$G=(\phi_{uy}(0),\phi_{uy}(1),\cdots,\phi_{uy}(p))^T\ 。\tag{4-46}$$

其中 I 为单位阵。由此，

$$\hat{h}=\frac{1}{\phi_{uu}(0)}G。\tag{4-47}$$

写成分量形式为

$$\hat{h}(k)=\frac{1}{\phi_{uu}(0)}\phi_{uy}(k),\quad(k=0,1,\cdots,p)。\tag{4-48}$$

由式4-45可知，当输入信号为白噪声随机序列时，最小二乘估计式中的矩阵 U^TU 将是对角阵，因此矩阵的求逆运算 $(U^TU)^{-1}$ 就可以简化，同时，互相关函数 $\phi_{uy}(k)$ 就可提供了权函数 $\hat{h}(k)$ 的采样值，这将大大简化脉冲响应函数的辨识，而且所得的结果在最小方差意义下是最优的。但是，用白噪声作为输入信号来计算互相关函数，在理论上需要利用无限长时间上的观测数据，这在实际上是不可能的。为此，人们用数字电路或计算机产生一种近似的白噪声序列，称为伪随机二进制序列(简记为 PRBS)。

PRBS 是双状态的周期序列，状态的转换是在指定时间 Δt 的整数倍时刻发生，转换前后的二状态是相互独立的。其波形图如图

4-3所示。

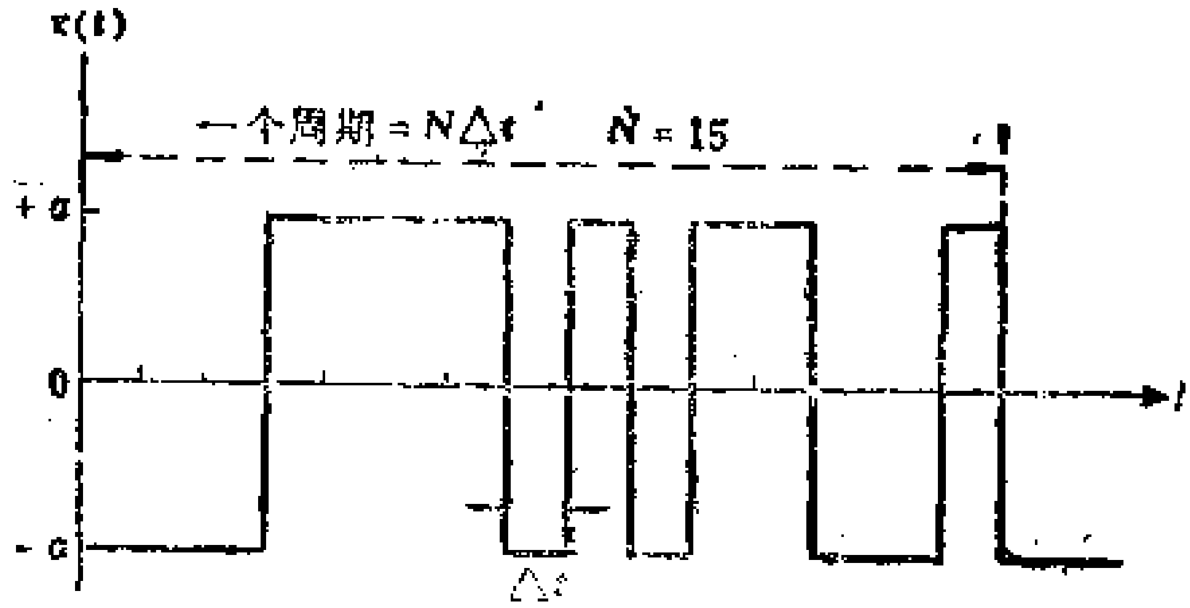


图 4-3 15位伪随机二位式序列

4.3.2 非线性系统的非参数辨识

考虑一个由图 4-4 所示的单输入-单输出系统，由第 3 章可知这个系统的输入输出关系可被表示成伏尔泰级数的形式。

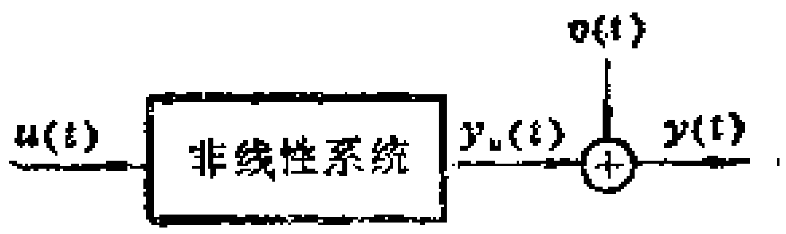


图 4-4 具有输出附加噪声的非线性动态系统

采样过程的非线性系统，可用如下离散伏尔泰级数表示：

$$y_u(k)=\sum_{i=0}^{p}h(i)u(k-i)+\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{p}h(i,j)u(k-i)u(k-j)$$
$$+\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{p}\sum_{m=0}^{p}h(i,j,m)u(k-i)u(k-j)u(k-m)+\cdots,$$

(4-49)

$$y(k)=y_u(k)+V(k)。\tag{4-50}$$

非参数辨识的目的，是要从 $\{u(k)\}$，$\{y(k)\}$ 的数据序列中估计出 $h(i)$，$h(i,j)$ 等权函数。由式 4-49 可知，如果取有限项的话，$h(i)$，$h(i,j)$ 等未知量可以用最小二乘估计求得，类似于在线性系统中求脉冲响应时的作法。现取二项伏尔泰级数为例，由上述方程

可得：

$$y(k)=\Phi^T(k)h+V(k), \tag{4-51}$$

其中，$V(k)$是输出端的随机噪声，

$$\Phi(k)=(u(k),\cdots,\ u(k-p)\mid u^2(k),\ u(k)u(k-1),\ \cdots,u^2(k-p))^T,$$

$$h=(h(0),h(1),\ \cdots,h(p)\mid h(0,0),\ h(0,1),\ \cdots,h(p,p,))^T。$$

设目标函数为 $\quad J=\sum_k V^2(k)$。

求使 J 为最小的 h 值，这是一个典型的最小二乘问题，可以用4.2中介绍的方法求解。

这种用伏尔泰级数的非参数辨识方法，往往会导致一个高维的参数向量 h，其计算量很大，但是用这种方法可以不需要关于系统内部结构的详细知识。因此这种方法既有缺点也有优点。

维纳在伏尔泰级数的基础上，提出了非线性系统辨识的一般理论，维纳证明了如果用正态白噪声（功率谱为常数，幅度为正态分布的随机信号）作为输入，那么只要对伏尔泰级数加以适当变形，就可使其各项互相正交。从而使输入和输出之间的关系表示为：

$$y(t)=\sum_{n=0}^{\infty}G_n[K_n,\ u(t)]。 \tag{4-52}$$

其中，$\{G_n\}$是一组正交函数，K_n是关于其自变量的对称函数，被称为维纳核。$\{K_n\}$可以称为广义脉冲响应，$u(t)$是输入白噪声。前四项G_n可以写出如下：

$$G_0[K_0,\ u(t)]=K_0,$$

$$G_1[K_1,\ u(t)]=\int_0^\infty K_1(\tau)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau,$$

$$G_2[K_2,\ u(t)]=\int_0^\infty\int_0^\infty K_2(\tau_1,\tau_2)u(t-\tau_1)u(t-\tau_2)\mathrm{d}\tau_1,\mathrm{d}\tau_2 -a\int_0^\infty K_2(\tau_1,\tau_2)\mathrm{d}\tau_1,$$

$$G_3[K_3,\ u(t)]$$

$$=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}K_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3)u(t-\tau_1)u(t-\tau_2)u(t-\tau_3)\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2\mathrm{d}\tau_3$$

$$-3\alpha\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}K_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3)u(t-\tau_1)\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2。$$

其中α为白噪声$u(t)$的功率谱密度。

关于维纳核的辨识方法，李(Lee)和斯茨恩(Schetzen)提出了一种利用互相关技术的估计方法。

如果给系统输入零均值正态白噪声$u(t)$，而测出其输出$y(t)$，则可以估出各阶核：

$$K_0=E[y(t)],$$

$$K_1(\tau)=\frac{1}{\alpha}R_{yu}(\tau),$$

$$K_2(\tau_1,\tau_2)=\frac{1}{2\alpha^2}\cdot R_{y_0uu}(\tau_1,\tau_2)。$$

其中，$y_0(t)=y(t)-E[y(t)]$。n阶核一般可由n阶互相关函数求出：

$$K_n(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n)$$

$$=\frac{1}{n!\alpha^n}E\left\{[y(t)-\sum_{k=0}^{n-1}G_k(t)]\,u(t-\tau_1)\cdots u(t-\tau_n)\right\}。$$

上式中$R_{yu}(\tau)$为$y(t)$和$u(t)$的互相关函数。

在实际应用中，白噪声序列可用PRBS信号来代替。维纳的理论适用于具有有限记忆的稳定系统。

4.4 系统的结构辨识

一个未知的系统，人们首先可以通过判断输入和输出关系是否满足叠加原理来区分系统是线性或非线性的。对于线性系统，由于其数学表达形式的统一性(例如用差分方程表示)，其结构辨识主要是确定系统的阶；对于非线性系统，由于其形式的多样性和复杂性，其结构辨识是极为困难的，它等价于“黑箱”辨识问题。本节主要介绍线性系统阶的辨识。

考察由式4-4、式4-5或式4-7表示的SISO离散线性系统，其目标函数由式4-9所示：$J(\hat{\theta})=(Y-\Phi\hat{\theta})^T(Y-\Phi\hat{\theta})$。该系统的阶数为$n$。关于阶的估计一般是通过统计检验方法来完成的。以下介绍一些简便的方法。

模型的拟合度试验　这种方法是通过比较一下不同阶次n的模型与观察数据之间的拟合程度（即拟合度）来判断实际的模型阶次。拟合度可以用式4-9来衡量。其中$\hat{\theta}$是对于一个设定阶次n的参数估计值。一般来讲，J将随着n的增大而减小，而当n变得比实际阶数n大时，J的下降就不明显了。这个原理可以用来确定模型的阶次，即分别计算阶次$n=1,2,3,\cdots$时的参数估计值$\hat{\theta}$和相应的误差函数J，然后选择当J下降不明显时的阶次作为合适的模型的阶次。

如图4-5所示当阶为$\hat{n}-1$时，J出现最后一次显著下降，往后J近似保持不变或变化缓慢，此时则取阶为$n=\hat{n}$。



图 4-5 n与J的关系

模型误差独立性试验　这种方法是通过检验残差序列$\{e(k)\}$的统计特性来判断模型的阶次。若模型的阶次是正确的，且参数估计值等于真值，则残差$e(k)$（如方程式4-7所示）是一个统计独立随机过程，因此可以通过判断$\{e(k)\}$是否独立来校验模型的阶次。

此外，还有F-检验方法、AIC准则等等。

对于非线性系统，除了上述非参数模型辨识方法之外（这种方

也可以理解为确定非线性系统结构)，还有所谓“彻底线性化方法”。即在状态空间，通过数据聚点分析的方法确定一个具有多个稳定平衡点的非线性系统的聚点，在这些聚点附近建立系统的局部化线性模型，然后把局部的线性模型接合成比较和谐的整体非线性模型。对于具有突变现象的非线性系统则可以利用托姆(Thom)的灾变理论(Catastrophe theory)来构造系统的模型结构。

5 系统分析

控制论是一门以系统为研究对象的科学。一旦系统的模型已经建立，其首要问题是对系统的性能进行研究和评价，这就是系统分析问题，它是正确设计控制系统的基础。本章将介绍控制论中，系统分析的一些基本方法，其中包括状态空间分析法、房室分析法、系统的稳定性，可控性，可观性等问题。

5.1 状态空间分析法

控制系统的状态空间描述方法已在3中作了介绍，本节主要介绍状态空间分析法中关于线性动态系统方程的求解。

首先分析线性定常系统的求解，此时系统的状态方程如下：

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{5-1}$$

$$\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0。 \tag{5-2}$$

其中，$x(t)$是$n\times 1$维向量，$u(t)$是$r\times 1$维向量，A、B分别是$n\times n$维矩阵和$n\times r$维矩阵。由微分方程的理论可知，当初值确定之后，式5-1的解就被唯一地决定，且方程的解由两部分组成，即由齐次方程的通解加上原方程的特解组成。

为了求解，先引进方阵的指数函数。方阵A的指数函数被当作一个纯量函数，它用如下幂级数定义：

$$\exp A \triangleq I + A + A^2/2! + \cdots + A^k/k! + \cdots。 \tag{5-3}$$

其中，I是$n\times n$阶单位阵。可以证明，该级数对任意具有有限阶的矩阵A是收敛的。将上述表达式中A用At代换可得：

$$\exp(At) = I + At + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^k}{k!}A^k + \cdots, \tag{5-4}$$

$$t_0 \leqslant t \leqslant T。$$

故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\exp(At)] = A + A^2 t + \frac{t^2}{2!}A^3 + \cdots$$

$$= A\exp(At) = \exp(At)A。\qquad (5\text{-}5)$$

由方程式 5-1 可知，

$$\dot{x}(t) - A\dot{x}(t) = Bu(t), \qquad (5\text{-}6)$$

如同对待纯量方程一样，在上述方程两边左乘上积分因子 $\exp(-At)$时有：

$$\exp(-At)\dot{x}(t) - \exp(-At)Ax(t) = \exp(-At)Bu(t),$$

此即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\exp(-At)x(t)] = \exp(-At)Bu(t),$$

上式二边在 t_0 到 t 之间积分可得：

$$\exp(-At)x(t) - \exp(-At_0)x_0$$
$$= \int_{t_0}^{t} \exp(-A\tau)Bu(\tau)\mathrm{d}\tau。$$

所以

$$x(t) = \exp A(t-t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \exp A(t-\tau)Bu(\tau)\mathrm{d}\tau。\qquad (5\text{-}7)$$

在上式中，第一项由 x_0 决定，它表示齐次方程的解，第二项是非齐次方程的特解。令

$$\phi(t, t_0) = \phi(t-t_0) = \exp A(t-t_0), \qquad (5\text{-}8)$$

则齐次方程$\dot{x}(t) = Ax(t)$的解可以表示为

$$x(t) = \phi(t-t_0)x(t_0)。\qquad (5\text{-}9)$$

由上式可以看出，系统在 t 时刻的状态值是由初始状态$x(t_0)$经$\phi(t-t_0)$作用后得到的。因此，可以将$\phi(t-t_0)$看成是促使状态转移的矩阵，故而称其为状态转移矩阵（或状态跃迁阵）。

由式 5-4 易知： $\phi(0) = I$, (5-10)

$x(t)$在二个不同时刻的解可表示为

$$x(t_1) = \phi(t_1 - t_0)x(t_0), \qquad (5\text{-}11)$$

$$x(t_2) = \phi(t_2 - t_0)x(t_0)。\qquad (5\text{-}12)$$

若取初始时刻为t_1，求$x(t_2)$的值，可得：

$$x(t_2)=\phi(t_2-t_1)x(t_1)$$
$$=\phi(t_2-t_1)\phi(t_1-t_0)x(t_0)。\qquad(5\text{-}13)$$

比较式 5-12 和式 5-13 可得：

$$\phi(t_2-t_1)=\phi(t_2-t_1)\phi(t_1-t_0)。\qquad(5\text{-}14)$$

由以上各式可充分看出状态转移矩阵的“转移”作用。显然，还可得到转移矩阵的以下特性：

$$I=\phi(t_0-t_1)\phi(t_1-t_0),$$
$$\phi^{-1}(t_1-t_0)=\phi(t_0-t_1),$$
$$\phi^{-1}(t)=\phi(-t)。\qquad(5\text{-}15)$$

利用转移矩阵，状态方程的解(5-7)可表示为

$$x(t)=\phi(t-t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}\phi(t-\tau)Bu(\tau)\mathrm{d}\tau。\qquad(5\text{-}16)$$

对于线性时变系统，也可得到类似的公式。

上述状态方程也可以用拉氏变换的方法来求解。对于齐次方程

$$\dot{x}(t)=Ax(t),\qquad x(0)=x_0。\qquad(5\text{-}17)$$

取拉氏变换后可得：

$$X(s)=(sI-A)^{-1}x(0)。\qquad(5\text{-}18)$$

其中，$X(s)$为$x(t)$的拉氏变换：$X(s)=L[x(t)]$；

对式 5-18 求拉氏逆变换后得：

$$x(t)=L^{-1}[(sI-A)^{-1}x(0)]。\qquad(5\text{-}19)$$

比较式 5 - 9 和式 5 -19可知：

$$\phi(t)=L^{-1}[(sI-A)^{-1}]。\qquad(5\text{-}20)$$

上式给出了寻求状态转移矩阵的另一种方法。

以下分析离散时间状态方程的求解。设系统的方程如下：

$$X(k+1)=GX(k)+Hu(k),\qquad(5\text{-}21)$$
$$y(k)=CX(k)+Du(k),\qquad(5\text{-}22)$$

对大于零的任意k值，方程式 5-21 的解可直接用迭代法得到：

$$X(1)=GX(0)+Hu(0),$$
$$X(2)=GX(1)+Hu(1)=G^2X(0)+GHu(0)+Hu(1),$$
$$X(3)=GX(2)+Hu(2)$$
$$=G^3X(0)+G^2Hu(0)+GHu(1)+Hu(2)。$$

一般形式为

$$X(k)=G^kX(0)+\sum_{j=0}^{k-1}G^{k-j-1}Hu(j),\quad (k=1,2,\cdots)。\tag{5-23}$$

显然，$X(k)$可以分为二个部分，其一与初态$X(0)$有关，其二与输入$u(j)$有关$(j=1,2,\cdots,k-1)$。矩阵 G^k 被称为状态转移矩阵，记为$\Phi(k)$。它是下列矩阵方程的唯一解：

$$\Phi(k+1)=G\Phi(k),\qquad \Phi(0)=I。\tag{5-24}$$

由此，式 5-23 可改写为

$$X(k)=\Phi(k)X(0)+\sum_{j=0}^{k-1}\Phi(k-j-1)Hu(j)$$
$$=\Phi(k)X(0)+\sum_{j=0}^{k-1}\Phi(j)Hu(k-j-1),$$

输出 $y(k)$可表示为

$$y(k)=C\Phi(k)X(0)+C\sum_{j=0}^{k-1}\Phi(k-j-1)Hu(j)+Du(k)。$$

以上介绍的都是线性系统，对于非线性微分方程或非线性差分方程，一般而言，没有普遍的解析求解方法，大多采用近似方法或数值求解。对于随机动态系统，将用随机微分方程或随机差分方程描述，其状态为一随机过程，求解更为复杂，往往仅能求得正态过程的分布函数。

5.2 房室分析法

在生物控制论中，需要建立一种特殊的模型系统——房室(compartment)系统。这类模型主要用来研究生理动力学问题。即药物、生理和生化物质在有机体内的分布、吸收、代谢和排泄等动态规律。由于这类模型的生理意义直观易懂，且其建立的步骤

简明，数学上难度也不大。因此，它是控制论工作者研究生理系统的较为理想的模型。基于房室系统的分析方法称为房室分析法。

房室分析方法起源于药物动力学的研究，早在本世纪 30 年代就已经开始应用，药物动力学的创始人泰雷尔 (Teorell) 在1937年就提出了三房室模型。但是“房室”这个名称却是谢伯德(Sheppard)于 1948 年才正式提出。随着生物科学和控制论的发展，这种方法已被广泛应用于药物动力学、代谢系统分析、化学反应动力学及生物控制论领域。1972年雅克(Jacquez) 发表了关于房室分析的专著。1980年布朗(R•F•Brown)对房室分析方法作了较全面的论述。1983年生物数学演讲集(Lecture Notes in Biomathematics) 第 50 卷发表了安德生 (Anderson) 的《房室建模及示踪动力学》专集。同年戈德弗里(Godfrey)的专著出版了。在我国汪云九、顾凡及的《生物控制论研究方法》一书中对这一方法作了介绍。1987年又出版了赵似兰等编著的《生物系统的房室建模与辨识》一书，对这一方法作了系统的介绍和论述。

5.2.1 房室的定义

房室系统是一个由有限个子系统组成的系统，每个子系统称之为房室。房室是具有以下性质的子系统：

(1) 有固定的容量，内含每一时刻都均匀分布着的单一物质(或能量)。

(2) 各房室间可进行物质(或能量)的交换，外环境的物质亦与一个或多个房室交换物质。

(3) 系统中各物质(或能量)交换，服从物质(或能量)守恒定律，即系统中物质(或能量) 的改变等于输入总量与输出总量之差。

如果房室系统不排出物质到外环境，则称为闭系统，否则称为开系统。

房室是人们根据研究的问题而设定的，因此它具有相对性。例

如在研究口服药物从胃、肠、血液、肾(或大肠、或肺)直至排出体外的过程时,可以把各种器官看成是房室。在研究碘代谢过程中可以把甲状腺定为一个房室,自由的或无机碘为第二个房室,而把与蛋白质结合的碘看作是第三个房室。

如果把人体看成一个大系统,那末房室可以认为是一个子系统,但是房室一般不同于结构性的子系统,它是一种功能性的子系统。人们是从功能的角度来设定系统的房室。例如,将机体中处于某特定区域或某特定化学状态的特定代谢物作为系统的房室,而将这些特定代谢物的数量、浓度或活性作为状态变量。

房室分析法主要研究代谢物在生物系统内传输、循环、代谢等动态过程,此方法主要由二个主要方面构成,首先是确定一个系统有哪些房室及各个房室间的联系,这主要是生物学家的事;其次是在适当的假设条件下,利用物质守恒定理列出房室的数学方程,建立其数学模型。

5.2.2 房室的数学描述

设某生物系统可以设定 n 个房室,假定从第 j 个房室流入第 i 个房室的物质流仅仅依赖于第 j 个输出房室流出物的质量或浓度,而与第 i 个房室的物质质量或浓度无关。那么,利用质量平衡定律可以给出房室的方程为

$$\frac{dx_i}{dt} = f_{i0} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{n} (f_{ij} - f_{ji}) - f_{0i}, \tag{5-25}$$

$$0 \leqslant t < \infty, \quad x_i(0) = x_{0i}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

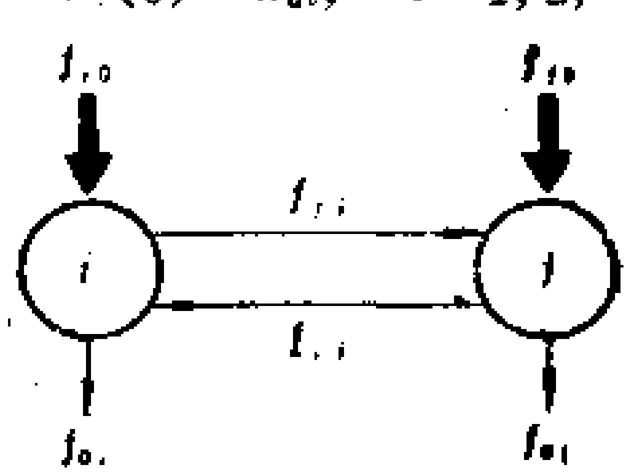


图 5-1 房室结构示意图

其中，x_i是第 i 个房室的物质质量或浓度，被看成是状态，x_{0i}是x_i的初值。f_{rs}是从 s 房室流到 r 房室的质量流的速率，下标 0 表示环境。上述方程描写的系统可如图 5-1 所示。

上述一般房室模型可以分类如下：

(1) 非线性房室模型。由式 5-25表示的方程是最一般的非线性房室模型。通常相互交链的房室流与状态变量x_1, …, x_n有关。若 f_{ij} 满足如下关系：

$$f_{ij}=k_{ij}f_j(x_j), \tag{5-26}$$
$$i=0,1,2,\cdots,n,$$
$$j=1,2,\cdots,n,$$
$$j\neq i。$$

其中，k_{ij} 是速率系数函数，$f_j(x_j)$ 是正函数，即 $f_j(x_j)>0$。当$x_j>0$时，$j=1,2,\cdots,n$，将式 5-26 代入式5-25可得

$$\frac{dx_i}{dt}=f_{i0}+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}[k_{ij}f_j(x_j)-k_{ji}f_i(x_i)]-k_{0i}f_i(x_i), \tag{5-27}$$
$$0\leqslant t<\infty, \quad x_i(0)=x_{0i} \quad i=1,2,\cdots,n。$$

关于这种类型的房室模型，米德(H•Maeda)和科达玛 (S•Kodama)在1978 年作了稳定性分析[39]。当系统内各房室间的物质传输是通过一些较复杂的化学反应来实现时，则往往出现非线性特性。例如磺胺类药物在血液中与血浆蛋白相结合的比例很高，这种结合反应是非线性的，它在体内的分布规律就必须用非线性系统进行分析研究。而当药物和血浆蛋白结合较少时，常常可以简化成线性房室系统。当 $f_j(x_j)$ 是关于x_j的线性函数时，就得到了线性模型。

(2) 摄动模型。设存在一些稳定的输入流 $\bar{f}_{10}$, …, $\bar{f}_{n0}$，并且由这些输入流产生的稳定状态$\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n$满足如下稳态方程：

$$0=\bar{f}_{i0}+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}[k_{ij}f_j(\bar{x}_j)-k_{ji}f_i(\bar{x}_i)]-k_{0i}f_i(\bar{x}_i), \tag{5-28}$$
$$i=1,2,\cdots,n$$

若在 $t=0$ 时刻的稳定状态有一个小的摄动

$$x_i(0)=\bar{x}_i+\varepsilon\tilde{x}_{0i},\quad i=1,2,\cdots,n, \tag{5-29}$$

与这个摄动所产生的 t 时刻的房室质量为

$$x_i(t)=\bar{x}_i+\varepsilon\tilde{x}_i(t),\quad i=1,2,\cdots,n, \tag{5-30}$$

在式 5-27 的基础下，利用台劳级数展开法，取到关于 ε 的一阶项，可得如下方程：

$$\frac{d\tilde{x}_i}{dt}=\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}[k_{ij}f'_j(x_j)\tilde{x}_j-k_{ji}f'_i(x_i)\tilde{x}_i]-k_{0i}f'_i(\bar{x}_i)\tilde{x}_i, \tag{5-31}$$

$$0\leqslant t<\infty,\ \tilde{x}_i(0)=\tilde{x}_{0i},\qquad i=1,2,\cdots,n。$$

此处 $\quad f'_j(x_j)\triangleq\left.\frac{df_j(x_j(\tau))}{d\tau}\right|_{\tau=t_0}$

方程式 5-31 被称为摄动模型。

（3）示踪模型。当$t=0$时，在一些房室中注入了少量的示踪物质，由此就产生了在房室之间的示踪物质的流动。所谓示踪物就是可作定量侦察的物质，例如染料或放射性同位素。由于示踪物的可见性或放射性，因而称为标记物质。示踪模型就是描写这种房室流的模型。设在任意时刻 t，n 个不同房室中示踪物的量分别为：

$$\delta_1\ll x_1,\cdots,\delta_n\ll x_n,$$

在式 5-28 的稳定条件下，与式 5-27 所对应的方程是：

$$\frac{d\delta_i}{dt}=\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\left[k_{ij}f_j(\bar{x}_j)\frac{\delta_j}{\bar{x}_j}-k_{ji}f_i(\bar{x}_i)\frac{\delta_i}{\bar{x}_i}\right]$$

$$-k_{0i}f_i(\bar{x}_i)\frac{\delta_i}{\bar{x}_i}, \tag{5-32}$$

$$0\leqslant t<\infty,\quad \delta_i(0)=\delta_{0i},\quad i=1,2,\cdots,n。$$

关于示踪模型的详细论述可参见文献[40]。

（4）时变线性房室模型。这种模型的方程如下

$$\frac{dx_i}{dt}=f_{i0}+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}(k_{ij}(t)x_j-k_{ji}(t)x_i)-k_{0i}(t)x_i \tag{5-33}$$

$$0\leqslant t<\infty,\quad x_i(0)=x_{0i},\quad i=1,2,\cdots,n。$$

其中，比例系数至少有一个是时间的函数。例如静脉注射青霉素加用增效剂后，青霉素在体内的排除减慢，其速率系数随时间变化而不同，它在体内的分布模型可建立时变型。

（5）随机房室模型。当房室的微粒数目很小时，在房室之间传输微粒的随机性就变得很重要了。此时就需要考虑房室的随机模型。例如托里(Tolley)[41]等用随机性房室系统建立胃肿瘤发生和生长的群体模型。马蒂斯(Matis)[42]等对食品药物和化学工业中工作人员的致癌示踪物污染，建立了能说明某些生理机制的模型。

当房室模型被确定之后，在控制论中需要分析房室系统的稳定性、可实现性、可观性、可控性，可辨识性等等特性。通过对房室系统特性的分析，进一步了解整个系统的各种特性。

房室分析的方法除了用数学解析式的方法来分析之外，还可以用图解的方法加以分析。对于药物或代谢物质在机体中的动态过程，可以通过实验测出一些数据，绘制成实验曲线，然后根据实验曲线进行分析。

5.3 系统的稳定性

稳定性是动态系统的首要问题，若系统具有平衡状态，当外界对系统的干扰使系统偏离平衡状态时，系统是否能消除干扰恢复平衡，这就是所谓系统稳定性问题。在历史上，这个问题早就引起了数学家和天文学家的兴趣，并且成为在这些领域内推动科学发展的一个激励因素。法国数学家庞加莱(Poincare)在他的《微分方程所定义的积分曲线》一书中首先应用定性的方法研究微分方程解的稳定性问题。1892年俄国数学家李雅普诺夫给出了研究稳定性的普遍方法。然而，在当时的条件下，这种方法在工程上不很实用，工程师们还是喜欢使用劳斯、胡维茨的代数法以及奈奎斯特的频域法(这些方法至今仍被广泛应用)。可是，这些方法并不适用于非线性或时变系统。李雅普诺夫的方法则能为非线性系统的稳定性分析提供有力的工具。因此，随着近代控制理论的发展，

李雅普诺夫的理论和方法又引起人们的重视，使之得到进一步的发展。目前，这一理论和方法已成为近代控制理论的一个坚实基础。

除了李雅普诺夫提出的稳定性概念外，还有系统的轨道稳定性概念和结构稳定性概念。后二种稳定性是近年来在突变论、耗散结构论和自组织系统理论中所关注的，鉴于本书的性质和篇幅所限，主要介绍李雅普诺夫的稳定性理论。

李雅普诺夫曾经证明，由一般常微分方程所描述的系统，其稳定性问题可以用以下两种方法来解决。

第一种方法是把非线性函数用近似级数来表示，然后用近似方法解这个非线性方程，并分析其稳定性。根据这一方法，可以严格证明如下结论：

如果非线性方程在一个平衡点的邻域线性化形式为

$$\dot{Z}=AZ+O_2(Z)。$$

其中，$O_2(Z)$表示Z元素的二次和二次以上的项。若A的特征值均无零实部，那末非线性系统的平衡性质与线性系统$\dot{Z}=AZ$所表示的平衡性质是同样的。

第二种方法是不通过求解方程，而是运用李雅普诺夫函数的纯量函数来判别系统的稳定性。这种方法又称为李雅普诺夫直接法。首先给出关于稳定性的定义：

设系统的方程为

$$\dot{x}(t)=f(x(t),t)。\qquad(5\text{-}34)$$

式中，x为状态向量（n维向量），$f(x,t)$也是n维向量，假设上述方程在给定的初始条件下有唯一解。对于式5-34，若存在x_e使得$f(x_e,t)=0$则称x_e为系统的平衡状态。如果系统是线性定常的，即$f(x,t)=Ax$，那么，当A为非奇异矩阵时，系统只存在一个平衡状态；如果A为奇异矩阵，那么系统存在有无穷多个平衡状态。对非线性系统，可有一个或多个平衡状态。任何一个被隔离的平衡状态（即彼此孤立的平衡状态）都可通过坐标变换，移到坐标原点，因此，不失一般性，在下面的叙述中，将平衡状态都取为状态空间

的原点$x=0$。

现以二阶系统为例说明系统的稳定、渐近稳定和不稳定的概念。见图 5-2 所示。

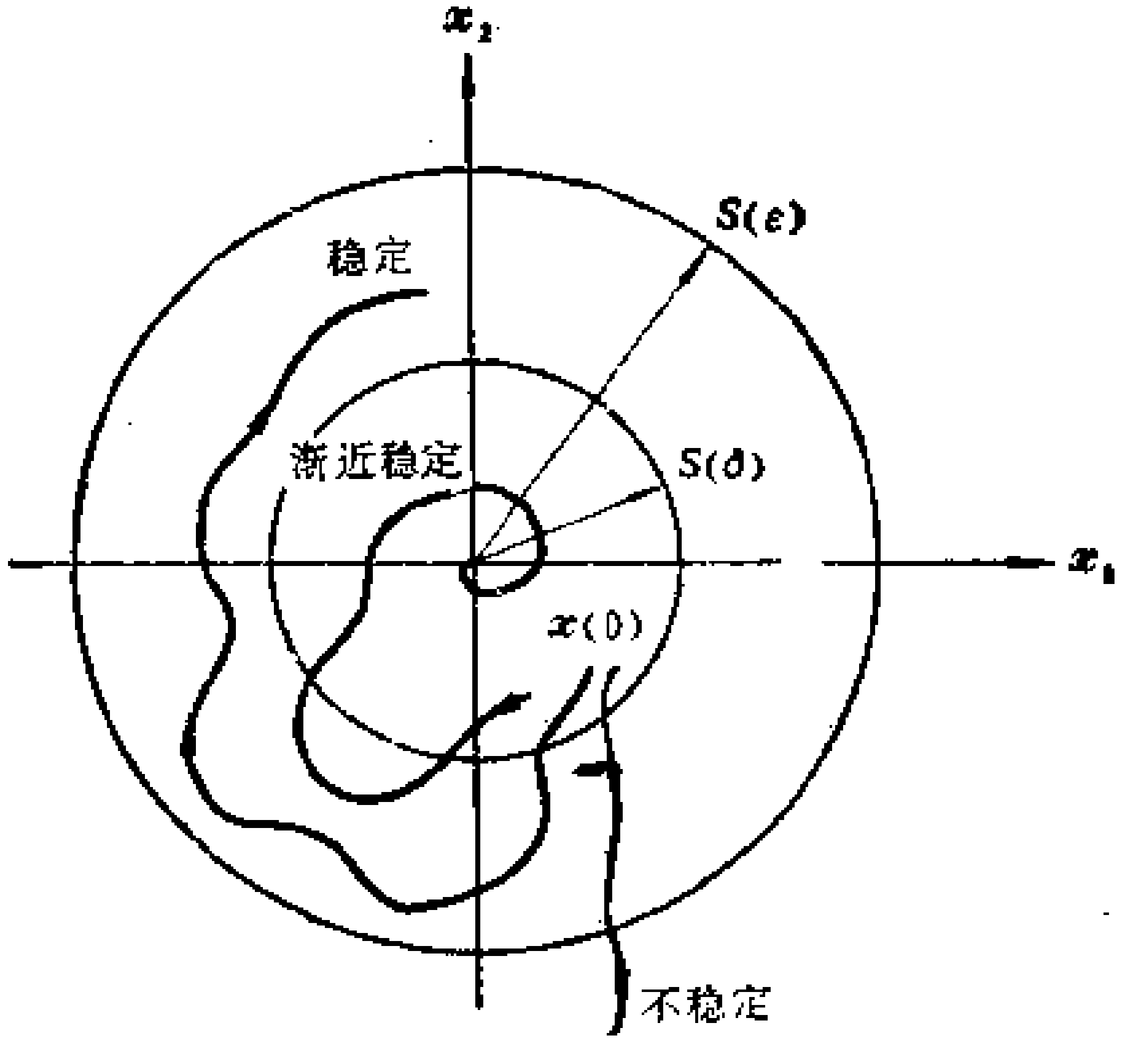


图 5-2 二阶系统的稳定性

当给定以任意正数 ε 为半径的圆 $S(\varepsilon)$，总能找出一个以适当的 $\delta(\delta>0)$ 为半径的圆 $S(\delta)$，当 t 无限增大时，从 $S(\delta)$ 圆内出发的状态轨迹总不离开 $S(\varepsilon)$ 圆内，这个二阶系统就称为在李雅普诺夫意义下是稳定的。假如从 $S(\delta)$ 出发的轨迹，当 t 无限增大时，不但不离开 $S(\varepsilon)$ 圆，而且收敛于原点(平衡点)$x=0$，对应的系统就叫做渐近稳定的。假如有某个 $\varepsilon>0$，则不论 $S(\delta)$ 的半径多么小，由 $S(\delta)$ 出发的轨迹总能跑到 $S(\varepsilon)$ 圆外，这个系统就称为是不稳定的。这三种情况用数学描述就是：

对于任意 $\varepsilon>0$，必有 $\delta>0$，使 $\|x(0)\|<\delta$，就能保证 $\|x(t)\|<\varepsilon$，则称系统稳定。

对于任意$\varepsilon>0$，必有$\delta>0$，使得当 $\|x(0)\|<\delta$时，不仅 $\|x(t)\|<\varepsilon$，而且$\lim\limits_{t\to\infty}\|x(t)\|=0$，则称系统渐近稳定。

对于某个$\varepsilon>0$，无论怎样取$\delta>0$，$\|x(0)\|<\delta$，恒有$t>0$，使$\|x(t)\|>\varepsilon$，则称系统不稳定。

上面$\|x\|$表示x的范数，在n维空间中，它表示状态向量到原点的距离：

$$\|x\| = (x^T x)^{1/2} = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}。 \tag{5-35}$$

$x_1, x_2, \cdots, x_n$表示向量x的分量值。

对于三阶系统，$S(\varepsilon)$，$S(\delta)$就是个球体。更高阶的系统$S(\varepsilon)$，$S(\delta)$就没有直观几何意义了。上述概念很容易推广到n维系统。

李雅普诺夫直接法有着明确的物理意义，它是从能量的观点分析系统的稳定性。如果一个系统储存的能量是逐渐衰减的，这个系统就是稳定的；反之，假如系统不断从外界吸收能量，系统的能量越来越大，这个系统就是不稳定的。如果用标量函数$V(x)$表示系统的能量，$V(x)$就总应该是个正值，要是$\frac{dV(x)}{dt}$是负值，系统的能量逐渐减少，系统就是稳定的。李雅普诺夫直接法就是用$V(x)$和$\frac{dV(x)}{dt}$的正负来判别系统稳定性。也就是说，对一个给定的系统，只要能找到一个正的$V(x)$，而$\frac{dV(x)}{dt}$是负的，这个系统就是稳定的。函数$V(x)$就叫李雅普诺夫函数。

一般说来，对于一个复杂的实际系统，不可能直观地找到能量函数，但是只要能找到一个标量函数$V(x)$，而且根据$V(x)$和$\frac{dV(x)}{dt}$的符号就能判别系统的稳定性，就可以把$V(x)$看成是假想的能量函数。

针对稳定、渐近稳定和不稳定三种情况，李雅普诺夫给出了三个基本定理：

定理5-1 如果存在一个李雅普诺夫函数$V(x)$，它满足：

(1) $V(x)$对所有x具有连续的一阶导数；

(2) $V(x)$是正定的，即$V(x)|_{x=0}=0$，$V(x)|_{x\neq 0}>0$；

(3) $\dot{V}(x)=\frac{dV(x)}{dt}$是半负定的，即 $x\neq0$，$\dot{V}(x)\leqslant0$。

此处$\dot{V}(x)$为标量函数$V(x)$在系统$\dot{x}=f(x)$的状态轨迹方向计算的时间导数。则由$\dot{x}=f(x)$描述的系统在原点附近是稳定的。

定理5-2 如果存在一个李雅普诺夫函数$V(x)$，它满足：

(1) $V(x)$对所有x具有连续的一阶偏导数；

(2) $V(x)$是正定的；

(3) $\frac{dV(x)}{dt}$是负定的。(导数的意义同定理1所述)

则系统在原点附近是渐近稳定的。

如果除了满足以上条件外，当$\|x\|\to\infty$时，$V(x)\to\infty$，系统就是大范围内渐近稳定的。

对于线性系统来说，若原点是渐近稳定的，则大范围也一定是渐近稳定的，而对非线性系统就不一定如此。

定理5-3 如果存在一个李雅普诺夫函数$V(x)$，它满足：

(1) $V(x)$对所有x具有连续一阶偏导数；

(2) $V(x)$是正定的；

(3) $\dot{V}(x)=\frac{dV(x)}{dt}$是正定的。

则系统在原点附近就是不稳定的。

必须指出，上面关于稳定、渐近稳定和不稳定三个定理中的条件都只是充分条件，而不是充要条件。因此，如果找不到满足这些条件的李雅普诺夫函数，并不能断定系统是否稳定、渐近稳定或者不稳定。从这一点来看，李雅普诺夫直接法是一种保守的方法。然而，这种方法的最大优点是无论线性还是非线性系统都适用。这种方法的关键是如何找到李雅普诺夫函数$V(x)$，应用中往往凭经验和技巧来试探寻找$V(x)$，这就影响了李雅普诺夫方法的推广应用。

［例5-1］ 研究由方程

$$\dot{x}_1=x_2-x_1(x_1^2+x_2^2) \tag{5-36}$$

$$\dot{x}_2=-x_1-x_2(x_1^2+x_2^2) \tag{5-37}$$

所描述的系统。显然，原点($x_1=0, x_2=0$)是唯一的一个平衡状态。试确定它的稳定性。

如果定义一个正定的纯量函数$V(x)$为

$$V(x)=x_1^2+x_2^2, \tag{5-38}$$

那么，沿任意状态轨迹$V(x)$对时间的导数为

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= 2x_1\dot{x}_1+2x_2\dot{x}_2=2x_1[x_2-x_1(x_1^2+x_2^2)] \\ &\quad +2x_2[-x_1-x_2(x_1^2+x_2^2)] \\ &= -2(x_1^2+x_2^2)^2,\end{aligned} \tag{5-39}$$

是负定的。这说明$V(x)$沿任意轨迹是连续减小的，因此，$V(x)$是一个李雅普诺夫函数。由于$V(x)$随偏离平衡状态趋于无穷大而变为无穷大，所以由定理 5-2 可知，原点处的平衡状态是大范围内渐近稳定的。

[例5-2]　已知线性系统的方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}, \tag{5-40}$$

如果选取$V(x)=2x_1^2+x_2^2$，则$V(x)$是正定函数，但是

$$\dot{V}(x)=4x_1\dot{x}_1+2x_2\dot{x}_2=2x_1x_2-2x_2^2$$

这时$\dot{V}(x)$是不定的。所以所选取的$V(x)$不是一个李雅普诺夫函数，因而不能用它来确定系统的稳定性。

如果选取下列纯量函数作为一个可能的李雅普诺夫函数：

$$V(x)=x_1^2+x_2^2=\text{正定的}, \tag{5-41}$$

那么

$$\dot{V}(x)=2x_1\dot{x}_1+2x_2\dot{x}_2=-2x_2^2 \tag{5-42}$$

是一个负半定的纯量函数。如果$\dot{V}(x)$在$t\geqslant t_1$时恒等于零，那么对所有$t\geqslant t_1$的x_2必为零。这就要求在$t\geqslant t_1$时，$\dot{x}_2=0$，由于$\dot{x}_2=-x_1-x_2$，所以在$t\geqslant t_1$时，$x_1=0$，这就是说$\dot{V}(x)$只有在原点处才恒等于零。由定理 5-2 易知该系统在原点处的平衡状态是大范围内渐近稳定的。

如果再选取：

$$V(x)=\frac{1}{2}[(x_1+x_2)^2+2x_1^2+x_2^2]\text{是正定的}, \tag{5-43}$$

那么，

$$\dot{V}(x)=(x_1+x_2)(\dot{x}_1+\dot{x}_2)+2x_1\dot{x}_1+2x_2\dot{x}_2$$
$$=-(x_1^2+x_2^2), \tag{5-44}$$

这个函数是负定的。又因为随着 $\|x\|\to\infty$ 有 $V(x)\to\infty$，由定理5-2可知，原点处是大范围渐近稳定的。

此例可以看出李雅普诺夫函数的选取是可以多种多样的。

【例5-3】 分析线性定常齐次方程

$$\dot{x}=Ax \tag{5-45}$$

在原点的稳定性。

取一个可能的李雅普诺夫函数，如

$$V(x)=x^TPx \tag{5-46}$$

式中 P 为正定对称矩阵。$V(x)$ 的时间导数为

$$\dot{V}(x)=x^TP\dot{x}+\dot{x}^TPx$$
$$=x^TPAx+x^TA^TPx$$
$$=x^T(PA+A^TP)x。 \tag{5-47}$$

如果 $\dot{V}(x)$ 是负定的，则系统在原点附近是渐近稳定的。为此，设

$$-Q=PA+A^TP。 \tag{5-48}$$

只要 Q 是正定的，系统就是渐近稳定的，因此得出线性定常系统渐近稳定性的李雅普诺夫定理为：线性定常系统 $\dot{x}=Ax$ 在平衡状态 $x=0$ 处渐近稳定的充要条件为：给定一个正定对称矩阵 Q，存在一个正定对称矩阵 P，使得满足式5-48。系统的李雅普诺夫函数为 $V(x)=x^TPx$。在应用时往往取 $Q=I$。这里，给出的是充要条件，而不仅仅是充分条件。要证明这一点可以通过状态变量的变换，将 A 化成标准形后再证明。此处略去证明。

以上是利用李雅普诺夫函数方法来分析线性系统的稳定性。如果根据常微分方程求解的方法，可以将式5-45的解求出来，然后再分析当 $t\to\infty$ 时解的特性。利用这种直接求解的方法不难看出，方程式5-45所描述的系统在原点处是渐近稳定的充分必要条件是：矩阵 A 的特征值 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的实部应该全部为负值，即 $\mathrm{Re}(\lambda_i)<0(i=1,2,\cdots,n)$。所有特征值皆为负实部的矩阵，称

为稳定矩阵。

关于系统的稳定性还有许多丰富的内容，限于篇幅此处不再介绍。

5.4 系统的能控性与能观性

人们在实践中有时会遇到这样的情况：系统的某些状态变量或变量的组合完全不受控制变量的影响，或者说，当对系统施加适当的控制作用之后，系统并不能达到预期的状态；另一方面，当对系统的输出信号经过一段时间的测量以后，依据测量得到的信息并不能完全确定系统的状态变量。直观地说，前者称为系统不能控，后者称为系统不能观。显然，能控或能观是一个系统的基本特性，不能控或不能观的系统是很难进行控制的。在经典控制理论中，由于采用的是频率域方法，研究的系统主要是单变量系统，这些问题并不突出。但在现代控制理论中，采用了状态空间方法，要研究多变量系统，能控与能观的问题就成为非常重要的问题。

卡尔曼首先提出了系统的能控性和能观性这二个重要概念，他是在发现了传递函数描述方法的局限性之后，找到了在状态方程和传递函数这两种描述方法之间的本质区别，从而提出了这二个重要概念。以下首先给出能控性和能观性的定义。

设所考虑的定常线性系统为：

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{5-49}$$

$$y = Cx。 \tag{5-50}$$

其中 A、B、C 分别是 $n\times n$、$n\times m$、$n\times r$ 的常系数矩阵。$x\in R^{n\times 1}$，$u\in R^{r\times 1}$，$y\in R^{m\times 1}$。

能控性定义 如果对任意时刻 t_0 和任意初始状态 $x(t_0)$，都存在一个有限时刻 $t_f(t_f>t_0)$ 和一个控制输入 $u(t)$，$t_0\leqslant t\leqslant t_f$，使得在此控制作用下，$x(t_f)=0$，那么这个系统称为完全能控，或称 (A, B) 完全能控，简称能控。这也就是说，系统完全能控是指对任意初始时刻的任意一个初始状态，总可以找到一个控制，使得系统在有限时间内，从初始状态到达原点 0。

能观测性定义 假定系统的输入 $u=0$。如果对任意初始时刻 t_0 和任意初始状态 $x(t_0)$，存在一个有限时刻 $t_f(t_f>t_0)$，使得根据在 $[t_0, t_f]$ 上的输出 $y(t)$，能完全唯一地确定 $x(t_0)$，那么这个系统称为完全能观测，或称 (C, A) 是完全能观测，简称能观测的。这也就是说，完全能观测的系统在输入 $u=0$ 的情况下，对任意初始时刻的任意初始状态，均可用以后有限时间内的输出来唯一确定。如果输入不等于零，对于完全可观测的系统，容易证明对任意初始时刻的任意初始状态，均可用以后有限时间内的输入和输出来唯一确定。

对于式 5-49 和式 5-50 的系统，如果是完全能控和完全能观测的，则称为完全能控能观测的系统，或称 (C, A, B) 是完全能控能观测的。

定理5-4 式 5-49 的系统为完全能控的充分必要条件是矩阵

$$U=(B \mid AB \mid \cdots \mid A^{n-1}B) \tag{5-51}$$

的秩为 n。

在此不详细证明这个定理，仅给出 u 为标量时的启发式证明：

因为 $$x(t)=e^{At}x(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \tag{5-52}$$

由状态完全能控的定义，可得

$$x(t_1)=0=e^{At_f}\, x(0)+\int_0^{t_f} e^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

或 $$x(0)=-\int_0^{t_f} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau。 \tag{5-53}$$

可以证明

$$e^{-A\tau}=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k(\tau)A^k。 \tag{5-54}$$

将式 5-54 代入式 5-53，可得：

$$x(0)=-\sum_{k=0}^{n-1}A^k B\int_0^{t_f}\alpha_k(\tau)u(\tau)d\tau。 \tag{5-55}$$

令 $$\int_0^{t_f}\alpha_k(\tau)u(\tau)d\tau=\beta_k, \tag{5-56}$$

于是，式 5-55 则为

$$x(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} A^k B\beta_k$$

$$= -[B \vdots AB \vdots \cdots \vdots A^{n-1}B]\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \hdashline \beta_1 \\ \hdashline \beta_2 \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \beta_{n-1} \end{bmatrix}。 \quad (5\text{-}57)$$

式 5-57 实际上是n 个方程的线性方程组。如果系统是状态完全能控的，那么给定任一初始状态$x(0)$都应满足方程式 5-57。换句话说，如果对任一初始状态 $x(0)$，从式 5-57 都能解出一组独立β_k，使终止状态达到零，系统就是状态完全能控的。由线性代数可知，式 5-57 对任一$x(0)$ 有解的条件是 $n\times n$ 矩阵$U=[B \vdots AB \vdots \cdots \vdots A^{n-1} \vdots B]$ 为非奇异的，即 U 的秩为 n。

关于线性定常系统的能观测性判别准则有如下定理：

定理5-5 对于式 5-49 和式 5-50 的系统是完全能观测的充分必要条件是矩阵 V 的秩为 n：

$$V=\begin{bmatrix} C \\ \hdashline CA \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline CA^{n-1} \end{bmatrix}。 \quad (5\text{-}58)$$

定理的证明从略。

上述矩阵 U 和 V 分别称为能控矩阵和能观测矩阵。

另外，可以证明对于单输入-单输出线性定常系统，系统能控和能观的充要条件是系统的传递函数不能有对消因子，因此，对于要完整地描述控制系统的动态性能来说，传递函数是有局限性的。对于一个实际系统，其能控与能观特性共有四种可能的组合：能控能观、不能控不能观、能控不能观和能观不能控。

[例5-4] 设有一系统：

$$\dot{x} = A x + Bu, \quad y = Cx。$$

式中，$A=\begin{bmatrix}-2 & 2 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & -4 & 0\end{bmatrix}$，　$B=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$，

$C=[1\quad -1\quad 1]$。

试判断其能控性和能观性,并求其传递函数。

解　先求其能控矩阵,因为

$$A^2=\begin{bmatrix}3 & -4 & 2\\ 0 & 4 & 0\\ -2 & 10 & -1\end{bmatrix},$$

$$AB=\begin{bmatrix}-2 & 2 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & -4 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix},$$

$$A^2B=\begin{bmatrix}3 & -4 & 2\\ 0 & 4 & 0\\ -2 & 10 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix}。$$

所以能控矩阵为

$$U=[B\mid AB\mid A^2B]=\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}。$$

因为 $\det U=0$,故可判定系统不能控。

另一方面,能观测矩阵为:

$$V^T=[C^T\mid A^TC^T\ (A^T)^2C^T]。$$

因为
$$A^TC^T=\begin{bmatrix}-2 & 2 & 1\\ 2 & -2 & -4\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\end{bmatrix},$$

$$(A^T)^2C^T=\begin{bmatrix}3 & 0 & -2\\ -4 & 4 & 10\\ 2 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},$$

所以 $$V^T=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

因为 $\det V=0$，可判定系统是不能观测的。

系统的传递函数为

$$G(s)=C(SI-A)^{-1}B$$

$$=[1\quad -1\quad 1]\begin{bmatrix}s+2 & -2 & 1\\ 0 & s+2 & 0\\ -1 & 4 & s\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{(s+1)^2(s+2)}[1\quad -1\quad 1]$$

$$\times\begin{bmatrix}s(s+2) & 2(s+2) & -(s+2)\\ 0 & (s+1)^2 & 0\\ s+2 & -(4s+6) & (s+2)^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{-(s+2)+(s+2)^2}{(s+1)^2(s+2)}$$

$$=\frac{1}{s+1}。$$

显然，上述传递函数的分子和分母出现相消因子$(s+2)$。

［例5-5］ 试判断系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=(1\quad 1)\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

的可控性与可观性，并求其传递函数。

解 对于能控矩阵，因为

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\quad C=[1\quad 1],$$

系统的阶数为 $n=2$，而

$$(B \mid AB)=\left[\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\;\middle|\;\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

所以矩阵 $(B \mid AB)$ 的秩为 2，故系统是完全可控的。

对于能观测矩阵，

$$[C^T \mid A^TC^T]=\begin{bmatrix}C\\ \hline CA\end{bmatrix}^T=\left[\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\;\middle|\;\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix},$$

它的秩为 2，故系统是完全可观测的。

系统的传递函数为

$$G(s)=C[SI-A]^{-1}B=[1\quad 1]\begin{bmatrix}s & -1\\1 & s\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{s+1}{s^2+1}。$$

显然，$G(s)$ 中不存在可对消的因子。

6 最优控制

最优控制的理论是控制论中最基本的和重要的内容，对于一个实际系统和给定的性能指标，总是希望能得到一个最优控制。所谓最优控制是指对某一性能指标最优，而不是对任何性能指标最优。随着科学技术的飞速发展，出现了许多要求很高的受控对象，比如导弹、卫星、宇宙飞船及现代工业过程等等，很多控制问题都必需从最优控制的角度进行研究设计。

本章介绍最优控制理论的以下一些基本内容：最优控制问题的数学表示法、庞特里雅金(Pontryagin)最小值原理及贝尔曼(Bellman)的动态规划法。

6.1 最优控制问题的数学描述

所谓最优控制问题的数学描述，就是要用严格的数学语言，将通常的最优控制问题抽象为一个数学问题。为此涉及以下四个基本概念：

(1) 受控系统的数学模型。一个集中参数模型可以用一组常微分方程描写：

$$\dot{x}(t)=f(x(t),u(t),t)。\tag{6-1}$$

其中，$x(t)$是 n 维的状态向量，$u(t)$是 r 维控制向量，t 是实数自变量。$f(\cdot,\cdot,\cdot)$是关于 x、u 和 t 的 n 维函数向量。式 6-1 的特别形式为线性时变或线性时不变系统。

(2) 容许控制。控制变量往往都是具有物理属性的变量。例如电流、电压、温度、流量、舵偏角、电磁力矩等等。显然，控制变量的选取是受约束的，只能在一定范围内取值。设U表示控制变量的取值集合，一般地，U 是 R^r 空间中的一个子集。U 常常可表示为一个 r 维长方体，即：

$$U=\{u \mid \alpha_i \leqslant u_i(t) \leqslant \beta_i \quad i=1,2,\cdots,r\}。$$

$u_i(t)$是$u(t)$的分量。若$u(t)$满足下面条件：

1) $u(t) \in U$；

2) $u(t)$的每一个分量都是有界逐段连续函数。

则称这样的控制为容许控制。

(3) 目标集。一个可控的动态系统，在控制$u(t)$的作用下总要发生从一个状态到另一个状态的转移。当起始状态已知时，所要达到的末态，构成了控制所要达到的目标集。目标集可以是状态空间中的一个点，或者是一个集合。通常末态可以用以下末态约束条件来表示：

$$\left.\begin{aligned} h_1(x(t_f),t_f)=0 \\ h_2(x(t_f),t_f)\leqslant 0 \end{aligned}\right\} \tag{6-2}$$

目标集可以表示为

$$K=\{x(t_f):x(t_f)\in R^n, h_1(x(t_f),t_f)=0, \\ h_2(x(t_f),t_f)\leqslant 0\}。 \tag{6-3}$$

式中t_f表示末态的时刻。

(4) 性能指标。从初态$x(t_0)$到目标集K的转移可以通过不同的控制律$u(t)$来实现，为了从所有可行的控制律中找出一种符合人们需要的效果最佳控制，就必须设定评价指标。这就是性能指标。随着实际问题的不同要求，性能指标的选取也是不同的，例如可以选取产品、质量、成本的消耗及时间能量等等作为性能指标。在数学上，通常可以表示为如下形式：

$$J[u(\cdot)]=S(x(t_f),t_f)+\int_{t_0}^{t_f} L(x,u,t)\mathrm{d}t。 \tag{6-4}$$

上式中等号右边第一项$S(x(t_f),t_f)$是接近目标集程度，即末态控制精度的度量，常称末值型性能指标。性能指标的积分部份能反映控制过程偏差在某种意义上的平均或控制过程的快速性。式6-4称为复合型性能指标。

以上四个基本概念，也是最优控制问题中的四个要素，它们的不同组合将最优控制划分为不同的类型。

最优控制的提法可叙述如下：

已知受控系统的状态方程及给定的初态为

$$\dot{x}(t)=f(x(t),u(t),t),$$
$$\dot{x}(t_0)=x_0。$$

规定的目标集为K由式6-3表示。求一容许控制$u(t)\in U$、$t\in[t_0,t_f]$，使系统由给定初态出发，在$t_f>t_0$。时刻转移到目标集，并使性能指标式6-4为最小。

如果问题有解，记为$u^*(t)$，$t\in[t_0,t_f]$，称为最优控制，相应的轨迹$x^*(t)$称为最优轨线，$J^*=J[u^*(\cdot)]$称为最优性能指标。

通常，最优控制输入$u^*(t)$，它可以用下面两种方法来实现：

(1) 开环控制律。

(2) 反馈(闭环)控制律。

所谓开环控制律是指控制输入由参考输入以及输出的初始值确定：

$$u^*(t)=u^*[y(0),r(t),t]。\qquad(6-5)$$

如图6-1所示。

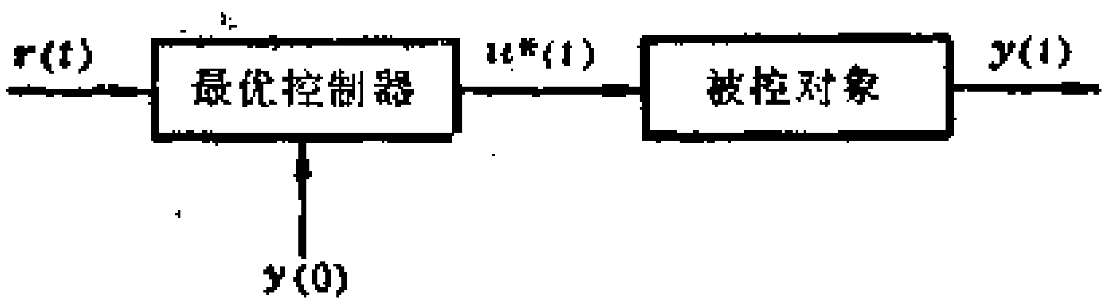


图 6-1 开环最优控制系统

反馈控制律是指控制输入由参考信号及受控对象的实时状态确定：

$$u^*(t)=u^*[y(t),r(t),t]。\qquad(6-6)$$

如图6-2所示。

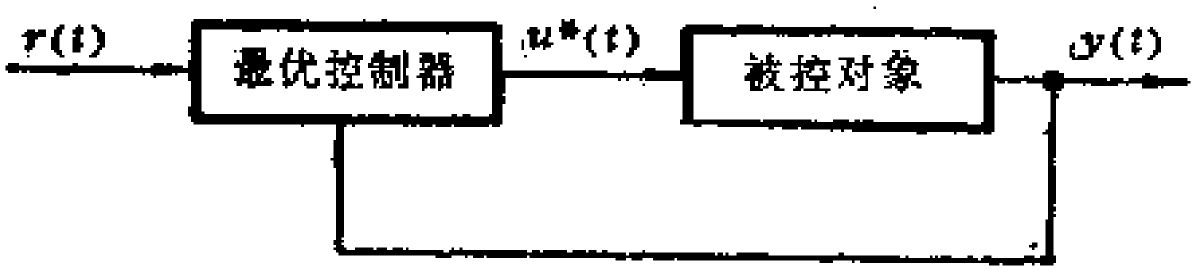


图 6-2 闭环最优控制系统

最优控制律 $u^*(t)$ 的求解，是一个求泛函极值的问题，是以数学中的变分法为基础的，然而用变分法求 $u(t)$ 会受到一定的限制，尤其不能用来求断续系统的最优控制的数值解。在现代控制理论中一般采用的方法有三种：庞特里雅金最小值原理、具有二次性能指标的线性系统的卡尔曼解以及贝尔曼的动态规划性。下面将分别介绍第一和第三种方法。

6.2 最小值原理

庞特里雅金提出的最小值原理（或称最大值）原理是求解最优控制问题的一个很有用的工具。将它称为最小值原理或称为最大值原理，在本质上是同一回事，只是叙述上不同而取为不同的名字而已。

6.2.1 最小值原理的表述

最小值原理给出了解决最优控制问题的一个必要条件。通过这个必要条件可以求得最优控制和相应的状态最优轨线。最小值原理的严格证明是复杂的，所用数学工具超出本书范围。在此只介绍其原理及应用。

设系统状态方程为：

$$\frac{dx}{dt}=f(x,u,t), \tag{6-7}$$

它的分量形式为

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n,u_1,u_2,\cdots,u_m,t), \tag{6-8}$$

$$(i=1,2,\cdots,n)$$

目标函数为：

$$J(u)=\int_{t_0}^{t_f}L[x(t),u(t),t]dt。 \tag{6-9}$$

引进一组辅助变量

$$\lambda(t)=(\lambda_1(t),\lambda_2(t),\cdots,\lambda_n(t))^T, \tag{6-10}$$

并假定它满足微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_i(t)}{\mathrm{d}t} = -\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_j(x,u,t)}{\partial x_i}\lambda_j(t) - \frac{\partial L(x,u,t)}{\partial x_i}。\qquad (6\text{-}11)$$

$$(i=1,2,\cdots,n)$$

$\lambda(t)$称为协状态变量。再引进一个辅助函数

$$H(x,u,\lambda,t) = L(x,u,t) + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t)\dot{x}_i$$

$$= L(x,u,t) + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t)f_i(x,u,t)。\qquad (6\text{-}12)$$

若写成向量形式为：

$$H(x,\lambda,u,t) = L(x,u,t) + \lambda^T f(x,u,t)。\qquad (6\text{-}13)$$

$\lambda(t)$ 称 $H(x,\lambda,u,t)$ 为哈密尔顿(Hamiltonian) 函数。由式 6-8 和式6-13可得：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H(x,\lambda,u,t)}{\partial\lambda},\qquad (6\text{-}14)$$

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H(x,\lambda,u,t)}{\partial x}。\qquad (6\text{-}15)$$

以上方程称为正则方程组。又称为哈密尔顿方程组。

假定 $f_i(x,u,t)$, $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x,u,t)$, $\frac{\partial L}{\partial t}(x,u,t)$, $\frac{\partial L}{\partial x_i}(x,u,t)$关于自变量 x,u,t 都是连续的，其中 $i,j=1,2,\cdots,n$，并假定 $u(t)$是容许控制，其最小值原理叙述如下：

设 $u^*(t)$是最优控制，$x^*(t)$是对应于 $u^*(t)$的状态最优轨线，则：

(1) 存在一个向量 $\lambda^*(t)$，它和 $x^*(t)$ 满足下面正则方程组：

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial\lambda}(x,\lambda,u,t),\qquad (6\text{-}16)$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x,\lambda,u,t)。$$

此处 $\lambda^*(t)$称为协状态最优轨线。

(2) 哈密尔顿函数 $H(x^*(t),\ \lambda^*(t),u(t),t)$ 作为 u 的函数来说，在 $u=u^*(t)$上达到最小值。

$$H(x^*(t),\lambda^*(t),u^*(t),t)=M(x^*(t),\lambda^*(t),t)$$
$$=\min_{u\in U} H(\lambda^*(t),\lambda^*(t),u,t)。\tag{6-17}$$

(3) 正则方程组式5-16的边界条件，根据不同情况，确定如下，

1) 若已给定 $x(t_0)=x_0$, $x(t_f)=x_1$ 即为固定端点的控制问题，则正则方程组的边界条件为：

$$x(t_0)=x_0,\quad x(t_f)=x_1。\tag{6-18}$$

2) 若 $x(t_0)=x_0$ 给定，$x(t_f)$ 是自由的，即为自由端点问题，则正则方程组的边界条件为：

$$x(t_0)=x_0,\quad \lambda(t_f)=0。\tag{6-19}$$

3) t_0 通常是给定的，如果 t_f 是自由的，即是自由终端时刻的控制问题，则多了一个独立参数，为了确定该参数还需要再附加一个条件。对于1)、2)给定的边界条件的情况下，只要在相应边界条件中，加入下面关系：

$$H(x(t_f),\lambda(t_f),u(t_f),t_f)=0,\tag{6-20}$$

以便确定 t_f。

利用上述最小值原理求解 $u^*(t)$，首先可以由式 6-17 解得 u^*,x^*,λ^* 的关系为

$$u^*=\mathscr{U}(x^*,\lambda^*,t),\tag{6-21}$$

然后，将式 6-21 代入正则方程组，则得到仅关于 x^*,λ^* 的 $2n$ 个未知数的 $2n$ 个微分方程组。再利用上述的边界条件，便可求出 $x^*(t)$和$\lambda^*(t)$。最后，将上面求得的 $x^*(t)$ 和 $\lambda^*(t)$ 代入式 6-21，便得到最优控制 $u^*(t)$。

[例6-1] 设系统状态方程为：

$$\dot{x}=-\frac{1}{2}x(t)+u(t),\tag{6-22}$$

$x(0)=x_0$, $x(1)$为自由，目标函数为：

$$J(u)=\int_0^1[x^2(t)+u^2(t)]dt,\tag{6-23}$$

求 u 使 $J(u)$达到最小。

解 哈密尔顿函数为

$$H(x,\lambda,u,t)=(x^2+u^2)+(-\frac{1}{2}x+u)\lambda。\tag{6-24}$$

正则方程组为

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=-\frac{1}{2}x+u,\\ \dot{\lambda}&=-2x+\frac{1}{2}\lambda。\end{aligned}\right\}\tag{6-25}$$

由于是自由端点控制问题,所以其边界条件为:

$$\left.\begin{aligned}x(0)&=x_0,\\ \lambda(1)&=0。\end{aligned}\right\}\tag{6-26}$$

因为 $$\frac{\partial H}{\partial u}=2u+\lambda=0,$$

所以 $$u=-\frac{\lambda}{2}。\tag{6-27}$$

将上式代入正则方程组得:

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\lambda,\\ \dot{\lambda}&=-2x+\frac{1}{2}\lambda。\end{aligned}\right\}\tag{6-28}$$

解此线性微分方程组,得其通解为:

$$x(t)=C_1e^{-\frac{\sqrt{5}}{2}t}+C_2e^{\frac{\sqrt{5}}{2}t}。\tag{6-29}$$

$$\lambda(t)=(\sqrt{5}-1)C_1e^{-\frac{\sqrt{5}}{2}t}-(\sqrt{5}+1)C_2e^{\frac{\sqrt{5}}{2}t}。\tag{6-30}$$

将边界条件式6-26代入式6-29及式6-30可解得:

$$C_1=\frac{(\sqrt{5}+1)e^{\frac{\sqrt{5}}{2}}x_0}{(\sqrt{5}-1)e^{-\frac{\sqrt{5}}{2}}+(\sqrt{5}+1)e^{\frac{\sqrt{5}}{2}}},\tag{6-31}$$

$$C_2=\frac{(\sqrt{5}-1)e^{-\frac{\sqrt{5}}{2}}x_0}{(\sqrt{5}-1)e^{-\frac{\sqrt{5}}{2}}+(\sqrt{5}+1)e^{\frac{\sqrt{5}}{2}}},\tag{6-32}$$

将式6-31、式6-32代入式6-29及式6-30就可求得$x^*(t)$，$\lambda^*(t)$，由式6-27可得最优控制为：

$$u^*(t)=\frac{2\left(e^{-\frac{\sqrt{5}}{2}(1-t)}-e^{\frac{\sqrt{5}}{2}(1-t)}\right)}{(\sqrt{5}-1)e^{-\frac{\sqrt{5}}{2}}+(\sqrt{5}+1)e^{\frac{\sqrt{5}}{2}}}x_0。$$

6.2.2 线性二次型最优调节器

例6-1是一个特殊的线性系统，现设一般系统的状态方程为：

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}=Ax+Bu,\\&x(t_0)=x_0。\end{aligned}\right\}\tag{6-33}$$

目标函数为：

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}(x^TQx+u^TRu)\mathrm{d}t。\tag{6-34}$$

其中，Q是半正定的对称矩阵，R是正定的对称矩阵，t_f为给定的终止时刻，$x(t_f)$是自由的，控制$u(t)$假定是没有约束的。问题是选择$u^*(t)$，使$J(u)$最小。这样的最优控制问题称为状态调节器问题。最优控制$u^*(t)$称为状态最优调节器。下面用最小值原理来求解此问题。

哈密尔顿函数为：

$$H(x,\lambda,u,t)=\frac{1}{2}x^TQx+\frac{1}{2}u^TRu+\lambda^T(Ax+Bu),\tag{6-35}$$

协状态方程为

$$\dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial x}=-Qx-A^T\lambda。\tag{6-36}$$

由最小值原理

$$\frac{\partial H}{\partial u}=Ru+B^T\lambda=0,\tag{6-37}$$

又由于$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}=R$为正定矩阵，所以最优控制必为下面形式：

$$u^*(t)=-R^{-1}B^T\lambda(t)。\tag{6-38}$$

因为$\lambda(t)$是引进的变量，在实际中检测不到，因此不便于使用。为此要将$\lambda(t)$求解出来。

由式6-33和式6-34可得：

$$\dot{x}(t)=Ax(t)-BR^{-1}B^T\lambda(t)。\qquad (6-39)$$

设
$$\lambda(t)=P(t)x(t)。\qquad (6-40)$$

上式二边求导可得：

$$\dot{\lambda}(t)=\dot{P}(t)x(t)+P(t)\dot{x}(t)。\qquad (6-41)$$

由式6-39、式6-40和式6-36可得：

$$\dot{x}(t)=[A-BR^{-1}B^TP(t)]x(t),\qquad (6-42)$$

$$\dot{\lambda}(t)=[-Q-A^TP(t)]x(t)。\qquad (6-43)$$

将式6-42、式6-43代入式6-41后，经整理可得：

$$[\dot{P}(t)-P(t)BR^{-1}B^TP(t)+P(t)A$$
$$+A^TP(t)+Q]x(t)=0。\qquad (6-44)$$

由于上式对任意解 $x(t)$ 都成立，所以

$$\dot{P}(t)-P(t)BR^{-1}B^TP(t)+P(t)A$$
$$+A^TP(t)+Q=0,\qquad (6-45)$$

即
$$\dot{P}(t)=-P(t)A-A^TP(t)+P(t)BR^{-1}B^TP(t)-Q。\qquad (6-46)$$

由于 $x(t_f)$是自由的，所以由最小值原理可知边界条件为

$$\lambda(t_f)=0,$$

所以
$$\left.\begin{aligned}P(t_f)x(t_f)=0,\\ P(t_f)=0。\end{aligned}\right\}\qquad (6-47)$$

方程式6-46称为黎卡提方程。将式6-46两边转置得：

$$\dot{P}^T(t)=-A^TP^T(t)-P^T(t)A+P^T(t)$$
$$\times BR^{-1}B^TP^T(t)-Q,\qquad (6-48)$$

且
$$P^T(t_f)=0。\qquad (6-49)$$

这说明$P^T(t)$ 与 $P(t)$满足同样的微分方程和相同的边界条件。由微分方程解的唯一性，得$P(t)=P^T(t)$，即$P(t)$是对称的。由此可知式 6-46 虽然包含有 n^2 个方程，但只须解$\frac{n(n+1)}{2}$个方程即可。

根据上面的推导可得如下定理：

定理6-1　上述最优调节器必为如下状态反馈形式：

$$u^*(t) = -K(t)x(t) = -R^{-1}B^TP(t)x(t)。 \quad (6\text{-}50)$$

其中 $K(t)$称为增益矩阵；$P(t)$是黎卡提方程

$$\dot{P}(t) = -P(t)A - A^TP(t) + P(t)BR^{-1}B^TP(t) - Q \quad (6\text{-}51)$$

$$P(t_f) = 0 \quad (6\text{-}52)$$

的解。最优状态轨迹$x^*(t)$是状态方程

$$\dot{x}(t) = [A - BR^{-1}B^TP(t)]R(t) \quad (6\text{-}53)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (6\text{-}54)$$

的解。最优协状态轨线可由下式确定：

$$\lambda^*(t) = P(t)x^*(t)。 \quad (6\text{-}55)$$

定理 6-1 在实际问题中有广泛的应用。

在上述问题中，如果由式6-34所表示的目标函数增加一个末值项，即采用如下的目标函数：

$$J(u) = x^T(t_f)S_1x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f}[x^TQx + u^TRu]dt。 \quad (6\text{-}56)$$

其中，S_1为 $n\times n$ 维的对称的半正定矩阵。

此时，仍可用最小值原理来求解。最优控制 $u^*(t)$和 $P(t)$仍由式6-50和式6-51表示，只是 $P(t_f)$由下式表示：

$$P(t_f) = S_1。 \quad (6\text{-}57)$$

性能指标的最小值为

$$\min_u J(u) = x^T(t_0)P(t_0)x^T(t_0)。 \quad (6\text{-}58)$$

此时矩阵黎卡提微分方程式6-51的解，在区间 $[t_0,T]$上存在且唯一。

由式6-50可知，只要控制区间是有限的，这种线性反馈系统总是时变的。即使当状态方程和性能指标都是时不变时，也是如此。但是，在工程上总希望对定常的被控系统，能有定常的反馈系统，以便于具体实现控制系统。研究表明，当上述问题中的末端时间T无限增加时，在一定条件下，$P(t)$将接近于常数矩阵，此时能构成定常的反馈控制系统。对此有如下定理：

定理6-2 已知完全能控的线性定常系统

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}(t)&=Ax(t)+Bu(t)\\x(t_0)&=x_0\end{aligned}\right\}\tag{6-59}$$

和二次型性能指标

$$J[u(\cdot)]=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}[x^T(t)Qx(t)+u^T(t)Ru(t)]\mathrm{d}t。\tag{6-60}$$

其中，控制变量不受约束，即$u(t)\in R^r$；A、B、Q、R都是常数矩阵，且$Q\geqslant0$为非负定对称阵，$R>0$为正定对称阵。

最优控制存在，且唯一地由下式确定：

$$u^*(t)=-R^{-1}B^TPx^*(t)\tag{6-61}$$

其中，P是代数黎卡提方程

$$PA+A^TP-PBR^{-1}B^TP+Q=0\tag{6-62}$$

的非负定对称解，或是黎卡提微分方程组

$$\left.\begin{aligned}\dot{P}&=-PA-A^TP+PBR^{-1}B^TP-Q\\P(t_f)&=0\end{aligned}\right\}\tag{6-63}$$

的稳态解。

以任意初态开始的最优性能指标为

$$J^*[x(t_0),t_0]=\frac{1}{2}x_0^TPx_0。\tag{6-64}$$

定理6-2表明，当 A、B、Q、R均为常数矩阵，且 $t_f=\infty$时，其解P也是常数矩阵，因而闭环反馈系统

$$\dot{x}(t)=(A-BR^{-1}B^TP)x(t)$$

是定常的。故称此种最优调节器问题为线性定常调节器问题，或简称定常调节器问题。这是工程上应用最广的一类调节器问题。

［例6-2］ 设一阶系统为

$$\begin{cases}\dot{x}=bu,\\y=cx。\end{cases}$$

其中 $b>0$, $c>0$。性能指标为 $J(u)=\int_0^{\infty}[u^2(t)+y^2(t)]\mathrm{d}t$。

试确定使上述性能指标为最小的控制输入$u(t)$。

解 在这种情况下，目标函数可改写为：

$$J[u]=\int_0^{\infty}(u^2+c^2x^2)\,\mathrm{d}t,$$

因此，黎卡提方程为

$$-b^2S^2+c^2=0。$$

解此方程，得

$$S=\pm\left|\frac{c}{b}\right|。$$

因为 S 必须为正值，所以取 $S=\frac{c}{b}$。

最佳控制输入可表示为：

$$u(t)=-b\cdot\frac{c}{b}x(t)=-cx(t)=-y(t)\ 。$$

这个最佳调节器，可以用图 6-3 所示的单位反馈系统来表示。

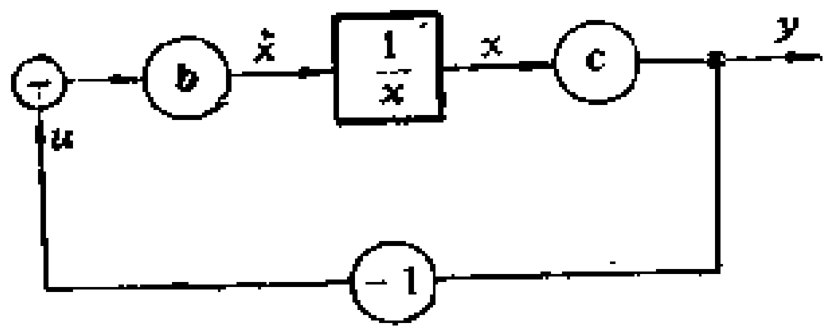


图 6-3 系统的最佳调节器

[例6-3] 二阶系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u,$$

控制信号 $u(t)=-Kx(t)$（K为反馈增益矩阵）。

性能指标为

$$J=\int_0^{\infty}(x^TQx+u^Tu)\,\mathrm{d}t。$$

式中，

$$Q=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \mu\end{bmatrix},\quad (\mu\geqslant 0)$$

试设计最优反馈增益矩阵 K，使性能指标 J 为极小值。

解 本例中

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\ R=1,$$

$$Q=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \mu\end{bmatrix}。$$

当末值时间 $t_f=\infty$，对于定常系统，$P(t)$为常数矩阵，由代数黎卡提方程解得：

$$P(t)A+A^TP(t)-P(t)BR^{-1}B^TP(t)+Q=0,$$

即 $$\begin{bmatrix}p_{11}(t) & p_{12}(t)\\ p_{12}(t) & p_{22}(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11}(t) & p_{12}(t)\\ p_{12}(t) & p_{22}(t)\end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix}p_{11}(t) & p_{12}(t)\\ p_{12}(t) & p_{22}(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}[1][0\quad 1]\begin{bmatrix}p_{11}(t) & p_{12}(t)\\ p_{12}(t) & p_{22}(t)\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \mu\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}。$$

简化后可得

$$\begin{bmatrix}0 & p_{11}(t)\\ 0 & p_{12}(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ p_{11}(t) & p_{12}(t)\end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix}p_{12}^2(t) & p_{12}(t)p_{22}(t)\\ p_{22}(t)p_{12}(t) & p_{22}^2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \mu\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

即

$$1-p_{12}^2(t)=0,$$

$$p_{11}(t)-p_{12}(t)p_{22}(t)=0,$$

$$\mu+2p_{12}(t)-p_{22}^2(t)=0。$$

由这三个联立方程中解出 $p_{11}(t)$，$p_{12}(t)$，$p_{22}(t)$时，要求$P(t)$是正定的，所以可得

$$P(t)=\begin{bmatrix}p_{11}(t) & p_{12}(t)\\ p_{12}(t) & p_{22}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{\mu+2} & 1\\ 1 & \sqrt{\mu+2}\end{bmatrix}。$$

状态反馈增益矩阵为常数矩阵，其计算公式为

$$K=R^{-1}B'P(t)。\tag{6-65}$$

因此

$$K=[1][0\ \ 1]\begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{12}(t) & p_{22}(t) \end{bmatrix}$$

$$=[p_{12}(t)\ \ p_{22}(t)]=[1\ \ \sqrt{\mu+2}]。$$

根据式6-61和式6-65,最优控制为

$$u^*(t)=-Kx(t)=-x_1-\sqrt{\mu+2}\,x_2。$$

由最优控制 $m^*(t)$给出的控制规律，对任意初始状态在给定的性能指标下都能保证其最优的结果。最优控制系统的结构图如图6-4所示。

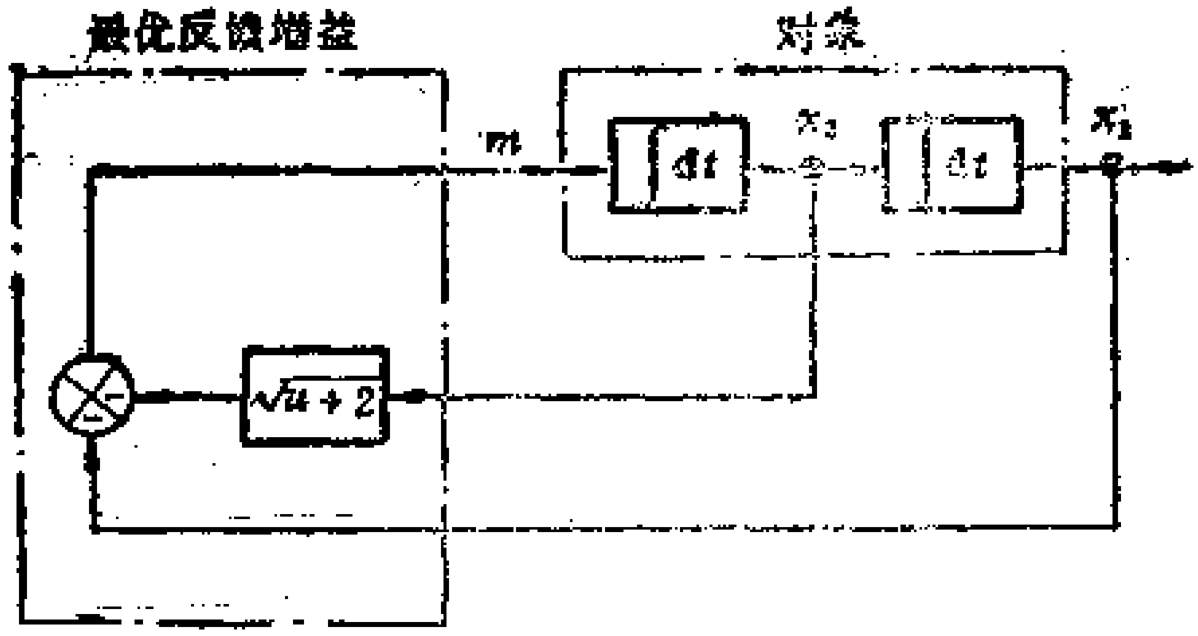


图 6-4 最优控制系统的结构图

6.3 动态规划与离散系统的最优控制

动态规划是贝尔曼于50年代作为多阶段决策过程而研究出来的。所谓多阶段决策过程指的是由于多阶段的特殊性可将过程分为若干个阶段,而在每一个阶段都要作出决定,以便使整个过程取得最优的效果。动态规划的基本思想是把一个多步最优控制问题化成为多个一步最优控制问题。

6.3.1 最优途径问题

设有如图6-5所示的最优途径问题。一辆汽车从图中S点出发到达目的地F,图中P_1、P_2、P_3、Q_1、Q_2、Q_3是可以通过的点，图中两

点间标的数字是汽车通过这两点所需的时间，单位是小时。求一种行驶的途径，使汽车从 S 点到达 F 点所用的时间最短。

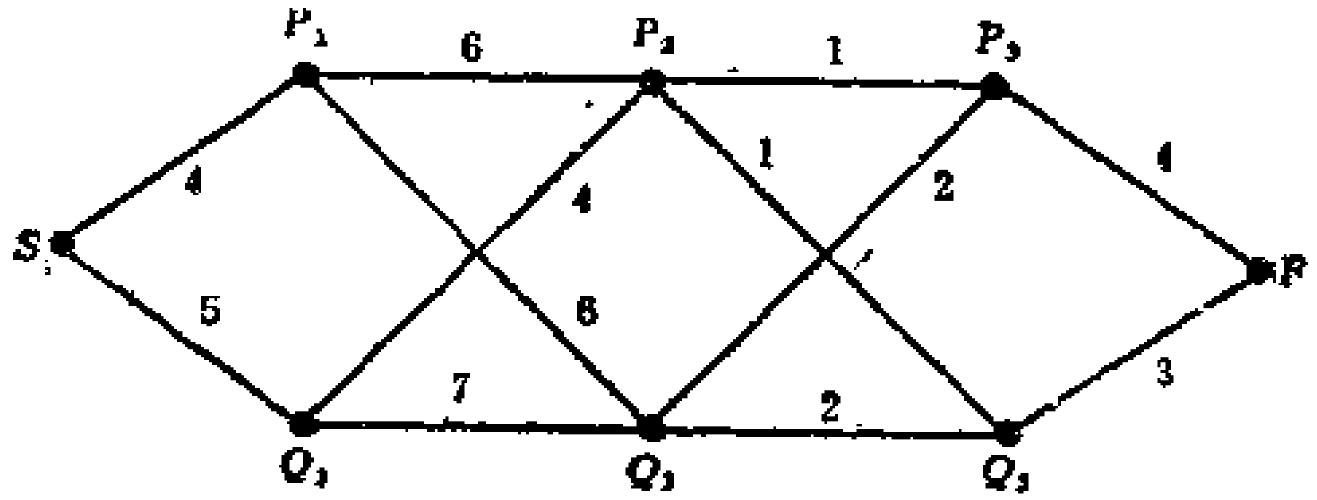


图 6-5　最优途径问题

汽车通过的途径共有八种可能的走法，如果将每一种可能走法的时间都求出来，然后选取一个最小时间的走法，这样就需要计算24次加法。

现在我们考虑一种比较简单的算法。由图6-5中可以看出，这是一个四阶段的决策问题。由S至 P_1 或Q_1是第一阶段，由P_1或Q_1至P_2或Q_2是第二阶段，由P_2或Q_2至P_3或Q_3是第三阶段，由P_3或Q_3到F 是第四阶段。

如果我们已知某一途径是最优途径，那么从这一途径中间任何一点开始，沿着这一途径到达终点F的行驶时间也应该是最优的。这可以从下面示意图说明：

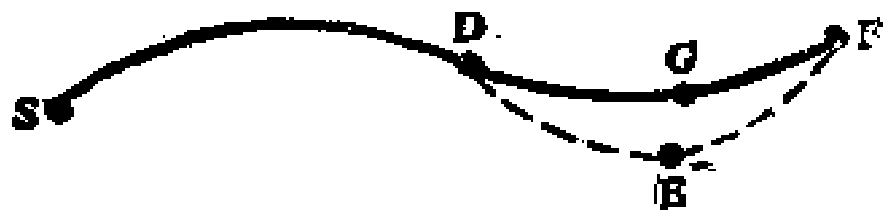


图 6-6　最优途径示意图

若$SDGF$是最优途径，则DGF也为从 D 到 F 的最优途径，若不然，设DEF是D到F的最优途径，那么$SDEF$将是比$SDGF$更优的途径，这与$SDGF$最优是矛盾的。这一事实用一句话来概括就是：最优策略的一部分也是最优策略。这个原理在动态规划中称它最优性原理。根据这样一个道理，对图 6-5 所示的最优途径问

题，可从后面往前考虑。由Q_3到F的时间为3小时，由P_3到F的时间为4小时，把它们分别标到P_3和Q_3旁边的括号内。从Q_2到F有两种可能，走Q_2P_3F需要6小时，走Q_2Q_3F需要5小时，后一走法用的时间较少，为5小时，这一时间标在Q_2旁的括号内。从P_2到F有两种可能的走法，走P_2P_3F需要5小时，走P_2Q_3F需要4小时，将4标在P_2旁。从Q_1出发，走$Q_1P_2Q_3F$所需要的时间最短为8小时，将8记在Q_1旁。从P_1出发，走$P_1P_2Q_3F$需要10小时，走$P_1Q_2Q_3F$需要11小时，将10记在P_1旁。最后，从S出发走$SP_1P_2Q_3F$需要14小时，走$SQ_1P_2Q_3F$需要13小时。因此，$SQ_1P_2Q_3F$为最短途径，行驶13小时。如图6-7所示。这样仅需做10次加法。

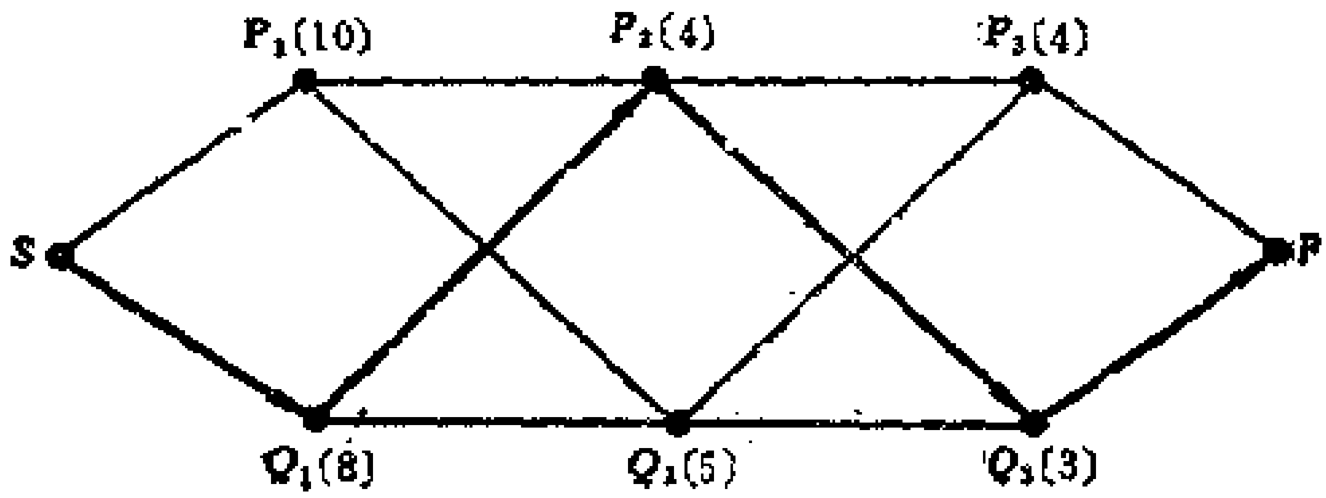


图 6-7 求最优途径的动态规划法

这个例子所应用的方法，就是动态规划的方法。这种方法适用的范围比较广，可用于多输入多输出的线性和非线性系统。下面将分析更为一般的问题。

6.3.2 离散系统最优控制问题

已给离散系统的数学模型是如下的差分方程：

$$\left.\begin{aligned} &x(i+1)=f(x(i),u(i)),\quad i=0,1,\cdots,N-1;\\ &x(0)=x_0。\end{aligned}\right\}\qquad(6\text{-}66)$$

其中$x(i)$和$u(i)$分别为n维和m维向量，$x(i)$为状态向量，$u(i)$为控制向量。

根据控制的要求提出一个目标函数J

$$J = F((xN)) + \sum_{i=0}^{N-1} L(x(i), u(i))。\tag{6-67}$$

目标函数中$F(x(N))$体现了对最终的状态x_N的要求，当对终点状态x_N没有什么要求时，J将可以写成：

$$J = \sum_{i=0}^{N-1} L(x(i), u(i))。\tag{6-68}$$

离散系统的最优控制问题是求最优控制 $u^*(0)$，$u^*(1)$，…，$u^*(N-1)$，使目标函数 J 最小（或最大）。这样的序列 $u^*(0)$，$u^*(1)$，…，$u^*(N-1)$称为最优控制序列，简称最优控制。把最优控制代入状态方程式6-66解出$x^*(1)$，…，$x^*(N)$称为最优轨线。

为了简单明了起见，先对$x(i)$，$u(i)$ 是一维的情况进行讨论。对于

$$x(i+1) = f(x(i), u(i)), \quad i = 0, 1, \cdots, N-1 \tag{6-69}$$

的系统，目标函数为 $$J_N = \sum_{i=0}^{N-1} L(x(i), u(i))。\tag{6-70}$$

问题是求解最优控制$u^*(0)$，$u^*(1)$，…，$u^*(N-1)$使J_N最小（或最大）。由式6-70和式6-69可以看出J_N只依赖于$x(0)$，$u(0)$，$u(1)$，…，$u(N-1)$，因此，记为

$$J_N = J_N(x(0), u(0), u(1), \cdots, u(N-1))。\tag{6-71}$$

如果已用某种方法得到了最优控制$u^*(0)$，…，$u^*(N-1)$，那么，J_N的最小值只依赖于初始条件，记为$J_N^*(x(0))$。一般用$J_N^*(x(0))$表示初始状态为 $x(0)$ 条件下控制N步时目标函数J_N的最小值。因此有：

$$J_N^*(x(0)) = \min_{u(0), \cdots, u(N-1)} \{J_N(x(0), u(0), \cdots, u(N-1))\}。\tag{6-72}$$

为求解上述问题，需要引用最优性原理，动态规划方法就是利用最优性原理，导出J_N^*和J_{N-1}^*间的递推关系，将一个多步最优问题，化为多个一步最优问题。最优性原理的叙述如下：

如果$u^*(0), u^*(1), \cdots, u^*(N-1)$是上述最优控制问题的一个最优控制序列，那么，$u^*(1), \cdots, u^*(N-1)$一定也是一个最优控制序列，其初始状态是$x(1)=f(x(0), u^*(0))$。

由最优性原理可知，如果$u^*(0)$已求出，求$u^*(1), \cdots, u^*(N-1)$的问题构成一个初始条件为$x(1)$的$N-1$步的最优控制问题，根据前面引进的记号，这一问题的性能指标的最小值记为$J_{N-1}^*(x(1))$。由此可得：

$$J_N(x(0)) = \min_{u(0),\cdots,u(N)} \{J_N(x(0), u(0), \cdots, u(N-1))\}$$

$$= \min_{u(0)} \{L[x(0), u(0)] + J_{N-1}^*(x(1))\} \qquad (6\text{-}73)$$

其中，

$$x(1) = f(x(0), u(0)) \qquad (6\text{-}74)$$

式 6-73 被称为动态规划的基本方程，它给出了$J_N^*(x(0))$和$J_{N-1}^*(x(1))$之间的递推关系。通过这样一个递推关系，可以从最后一步开始，把N步控制问题化为N个一步控制问题。

[例6-4]考虑如下一维线性系统，对变量无约束，最优控制问题的数学模型为

$$\min J = \sum_{k=0}^{2}(q x_k^2 + r u_k^2)T, \qquad (6\text{-}75)$$

$$x_{k+1} = a x_k + b u_k。 \qquad (6\text{-}76)$$

初始状态x_0为已知。式中a、b、q、r为常数，$r>1$，设$T=1$，本例规定$N=3$，显然易见指标泛函为离散二次型，这是离散的一维线性二次型问题。

解　这个问题为三段决策问题，如图6-8所示。用动态规划方法求解，分三步，由后向前逆推。

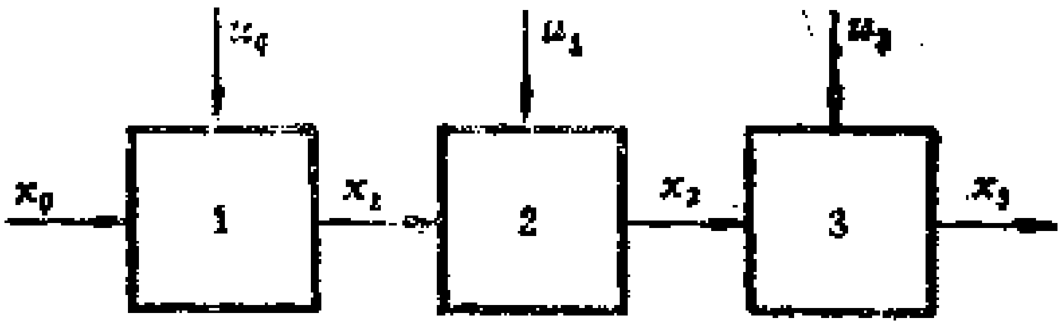


图 6-8　三段决策问题

第一步：

因为指标泛函式6-75中没有对终端状态提出要求，故，

$$J_0^*(x_3)=0。$$

求u_2^*，使$J_1^*(x_2)=\min\limits_{u_2}L(x_2,u_2)=\min\limits_{u_2}(qx_2^2+ru_2^2)$

$$\frac{\partial}{\partial u_2}(qx_2^2+ru_2^2)=0,$$

$$2ru_2=0,\quad u_2^*=0, \tag{6-77}$$

$$J_1^*(x_2)=qx_2^2。 \tag{6-78}$$

第二步：

求 u_1^*，使$J_2^*(x_1)=\min\limits_{u_1}[L(x_1,u_1)+J_1^*(x_2)]$，将式 6-78 代入得：

$$J_2^*(x_1)=\min_{u_1}(qx_1^2+ru_1^2+qx_2^2)$$

$$=\min_{u_1}[qx_1^2+ru_1^2+q(ax_1+bu_1)^2],$$

$$\frac{\partial[qx_1^2+ru_1^2+q(ax_1+bu_1)^2]}{\partial u_1}=0,$$

$$u_1^*=-\frac{abqx_1}{r+b^2q}=-f_1x_1。 \tag{6-79}$$

将式6-79代入 $J_2^*(x_1)$式可得：

$$J_2^*(x_1)=\left(1+\frac{ra^2}{r+b^2q}\right)qx_1^2。 \tag{6-80}$$

第三步：

求 u_0^*，使$J_3^*(x_0)=\min\limits_{u_0}[L(x_0,u_0)+J_2^*(x_1)]=\min J_3$，将式 6-80 代入，取$\frac{\partial J_3}{\partial u_0}=0$，得：

$$u_0^*=-\frac{abq(r+b^2q+ra^2)}{(r+b^2q)^2+ra^2b^2q}x_0=-f_0x_0。 \tag{6-81}$$

并可求得最优指标泛函为：

$$J_3^*(x_0)=\left[q+r\,f_0^2+\left(1+\frac{ra^2}{r+b^2q}\right)q(a-bf_0)^2\right]x_0^2。\qquad(6\text{-}82)$$

由式6-77、式6-79、式6-81可见，离散线性二次型问题中最优控制是状态的线性负反馈：

$$u_k^*=-f_kx_k,\quad k=0,1,2。\qquad(6\text{-}83)$$

本例中 $f_2=0$,

$$f_1=\frac{abq}{r+b^2q},$$

$$f_0=\frac{abq(r+b^2q+ra^2)}{(r+b^2q)^2+ra^2b^2q},$$

后$N-k$段最优指标泛函与初始状态$x_k^2(k=0,1,2)$成正比：

$$J^*_{N-k}(x_k)=p_kx_k^2。\qquad(6\text{-}84)$$

由式6-78、式6-80、式6-82可见，本例中：

$$p_2=q,$$

$$p_1=\left(1+\frac{ra^2}{r+b^2q}\right)q,$$

$$p_0=q+rf_0^2+p_1(a-bf_0)^2。$$

由例6-4可见，应用动态规划基本方程即式6-73、式6-74，可将一个求三段最优决策问题，化为求三个一段最优决策问题，从而简化了计算。由于这是一个无约束的线性二次型问题，因此可以用解析法求得最优控制序列。

7 状态估计

7.1 引言

在控制论中，系统的状态是一个需要确定的重要变量。其原因主要有两点：

(1) 状态变量是系统内部特性的反映，有了系统的状态就能使我们在输入的基础上，精确地预测它的输出，并更新状态本身。

(2) 控制系统的实现需要利用“状态”这个信息，构成反馈控制以实现各种目标的最优控制系统。

但是，对于大多数实际系统而言，人们并不能测定状态的全部分量，往往只能根据输出信息间接地获取状态的部分信息，又由于随机干扰的存在，得到与状态有关的数据是有观察误差的。为此，必须设计状态估计器，即利用输入和输出数据来重构系统的全部状态或求得状态的估计值，以使它尽量接近系统的真实状态。由于状态是时间的函数，这种估计是动态估计，它区别于系统的常参数估计。对于确定性系统，这种状态估计器，称为观测器；对于随机系统称为最优滤波器，即著名的维纳滤波器和卡尔曼滤波器(Kalman Filter)。

早在本世纪40年代初，柯尔莫哥洛夫和维纳等人就利用概率论的理论研究了最优估计问题，首先实现了动态估计，提出了维纳滤波器。但是维纳滤波器存在某些不足之处，以致于这种理论至今很少被实际应用。维纳滤波器要求系统的信号和噪声都必须是平稳随机过程，不能解决非平稳多维随机过程的滤波问题。此外，由于维纳滤波器的设计是基于“频域法”的，对于研究非线性系统或者具有时变参数的线性系统都是不适用的。对于工程应用来讲，维纳滤波器的最明显缺陷乃是它计算上的困难，它需要存贮和

处理大量数据，因而不适用于数字电子计算机的求解。

直到50年代末和60年代初，卡尔曼发展了维纳滤波器的理论，提出了最优线性递推滤波算法，克服了维纳滤波器的不足之处，使得它在制导、导航、通讯、工业控制等现代工程和科技领域中得到了广泛的应用。

本章将分别介绍确定性系统的状态观测器和卡尔曼滤波器的基本原理。

7.2 线性系统的状态观测器

7.2.1 一般观测器

设如下离散线性系统：

$$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k), \tag{7-1}$$

$$y(k)=Cx(k)。 \tag{7-2}$$

其中 x 为 $n\times1$ 维向量，$x\in R^n$；u 为 $r\times1$ 维向量，$u\in R^r$、y 为 $m\times1$维向量，$y\in R^m$；A、B和C是适当维的常数矩阵。设$m\leqslant n$，方程式7-2表示系统的状态$x(k)$不能完全直接测量时，$x(k)$ 的部分信息可根据输出来间接测定。

我们的目的是根据系统的输入和输出来构造一个观测器，使观测器的输出能重构系统的状态。由于状态是时间的函数，所以观测器本身也将是一个动态系统，设其方程如下：

$$z(k+1)=Dz(k)+Ey(k)+Gu(k), \tag{7-3}$$

$$\hat{x}(k)=L_1z(k)+L_2y(k)。 \tag{7-4}$$

其中 $z(k)$ 为$p\times1$维向量，D、E、G、L_1和L_2 均为适当维的矩阵。各系数矩阵按如下次序选择。

首先，给定一个 $p\times m$ 维的矩阵 E，并选择矩阵 D 满足如下两个条件：

(1) D的特征根均为负实部；

(2) D的特征根与矩阵 A 的特征根不相等。

其次，求解关于 M 的矩阵方程：

$$MA-DM=EC, \tag{7-5}$$

可以证明，当矩阵 A 和矩阵D无公共特征值时，上述方程存在唯一解 M，此处 M为$p\times n$维矩阵。

令矩阵G为

$$G=MB。\tag{7-6}$$

最后选择满足如下方程的矩阵 L_1和 L_2：

$$L_1M+L_2C=I_n。\tag{7-7}$$

其中 L_1 是 $n\times p$ 维矩阵，L_2是 $n\times m$ 维矩阵，I_n为 $n\times n$ 维单位阵。

在满足上述条件时，由式7-3和式7-4描述的动态线性系统，构成了观测器，即误差$e(k)=\hat{x}(k)-x(k)$，当 $k\to\infty$时误差将趋于零。

事实上，利用上述关系式7-3～式7-7可得：

$$\begin{aligned}
&z(k+1)-Mx(k+1)\\
&=Dz(k)+(EC-MA)x(k)+(G-MB)u(k)\\
&=Dz(k)-DMx(k)\\
&=D[z(k)-Mx(k)],
\end{aligned}$$

所以

$$z(k+1)=Mx(k+1)+D[z(k)-Mx(k)]。\tag{7-8}$$

利用差分方程的递推关系，可推得：

$$z(k)=Mx(k)+D^k\{z(0)-Mx(0)\}。\tag{7-9}$$

由式7-4可得：

$$\begin{aligned}
\hat{x}(k)&=L_2y(k)+L_1z(k)\\
&=L_2Cx(k)+L_1[Mx(k)+D^k(z(0)-Mx(0))]\\
&=(L_2C+L_1M)x(k)+L_1D^k(z(0)-Mx(0))\\
&=x(k)+L_1D^k(z(0)-Mx(0))。
\end{aligned}\tag{7-10}$$

所以误差为

$$e(k)=L_1D^k[z(0)-Mx(0)],\tag{7-11}$$

因为D为稳定矩阵，所以

$$\lim_{k\to\infty}e(k)=0。\tag{7-12}$$

这就是表示观测器的输出 $\hat{x}(k)$将趋近于系统的状态 $x(k)$。一般地，当 $z(k)$的维数 p 满足关系式

$$p \geqslant n - \text{rank}C \geqslant n - m \tag{7-13}$$

时，则可以构成满足以上各种条件的观测器即式7-3和式7-4。此观测器被称为兰恩伯格（Luenberger）观测器。p为观测器的维数，C的秩表示为 rank$C$。

对于线性连续时间系统：

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{7-14}$$

$$y(t) = Cx(t)。 \tag{7-15}$$

也可以构造类似的观测器，此时可由如下动态系统构成：

$$\left.\begin{aligned} \dot{z}(t) &= Dz(t) + Ey(t) + Gu(t), \\ \hat{x}(t) &= L_1 z(t) + L_2 y(t)。 \end{aligned}\right\} \tag{7-16}$$

其中，D 仍然选择为稳定矩阵，其他系数矩阵将按式 7-5～式 7-7 来选择。此时，估计误差为：

$$\begin{aligned} e(t) &= \hat{x}(t) - x(t) \\ &= L_1 e^{Dt}\{z(0) - Mx(0)\}。 \end{aligned} \tag{7-17}$$

兰恩伯格观测器的方框图如图7-1所示。

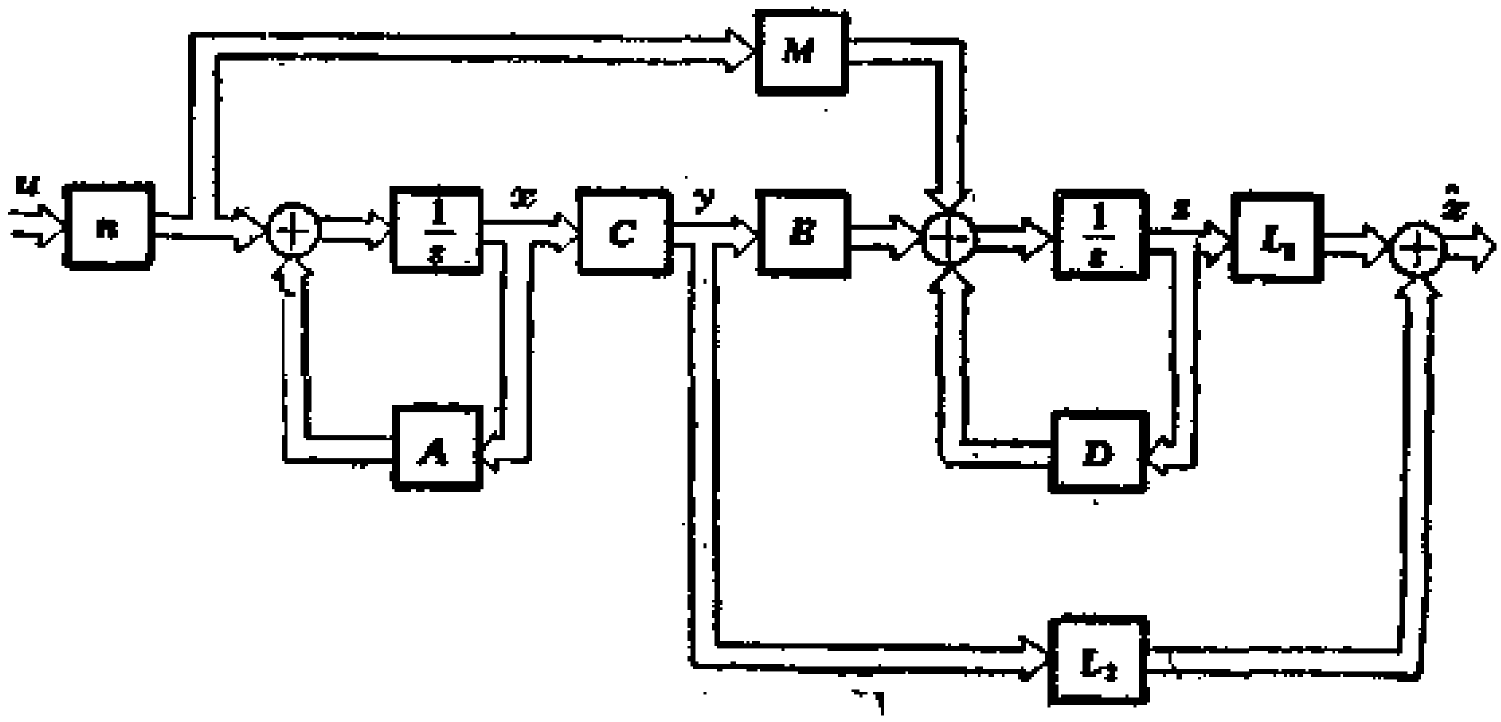


图 7-1　兰恩伯格观测器

7.2.2　最小维观测器

若输出y的各个分量是彼此无关的，则

$$\text{rank } C = m,$$

这表示状态变量x的各分量中，已有m个分量可以测出，此时仅需

要构造$n-m$维观测器，这样的观测器称为最小维观测器。

当式rank $C=m$成立时，可选择适当$(n-m)\times n$维矩阵C_0，使$n\times n$维矩阵

$$T=\begin{bmatrix} C_0 \\ C \end{bmatrix} \tag{7-18}$$

为正定的。因此，若对式7-14、式7-15的系统进行变换，$\bar{x}=Tx$，则有：

$$\bar{A}=TAT^{-1},\ \bar{B}=TB,$$
$$\bar{C}=CT^{-1}=[0 \mid I]。$$

最后一式由$[0 \mid I]\cdot T=C$推得。

若将上面的$\bar{x}$、$\bar{A}$、$\bar{B}$、$\bar{C}$，仍改记为x、A、B、C，并对x、A、B、C进行分解，则得

$$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},\qquad A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},\qquad C=[\,0\quad I\,]。$$

现在，对线性系统

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_{11}x_1+A_{12}x_2+B_1u \\ \dot{x}_2 &= A_{21}x_1+A_{22}x_2+B_2u \end{aligned}\right\} \tag{7-19}$$

$$y=x_2 \tag{7-20}$$

进行考察。

若观测器的维为p，则式7-7可写为

$$[L_1 \mid L_2]\begin{bmatrix} M \\ C \end{bmatrix}=I_n。 \tag{7-21}$$

因为矩阵$[L_1 \mid L_2]$的秩，至少为n，为使式7-23成立，所以一定有$p\geqslant n-m$。

设$p=n-m$，将矩阵L_1，L_2，M分解为

$$L_1=\begin{bmatrix} L_{11} \\ L_{21} \end{bmatrix},\qquad L_2=\begin{bmatrix} L_{12} \\ L_{22} \end{bmatrix},$$

$$M=[M_1 M_2]。$$

其中 L_{11}是$(n-m)\times p$ 维矩阵，L_{12}是$(n-m)\times m$维矩阵，M_1是$p\times(n-m)$维正定阵。此时，式7-21 可表示为

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & I \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \tag{7-22}$$

即必有

$$L_{11}M_1=I, \tag{7-23}$$

$$L_{21}M_1=0, \tag{7-24}$$

$$L_{21}M_2+L_{22}=I, \tag{7-25}$$

$$L_{11}M_2+L_{12}=0。 \tag{7-26}$$

由于式 7-23 中 L_{11}和M_1是正定的，因而在式7-24，一定有$L_{21}=0$，根据式 7-25，得知 $L_{22}=I$。若整理以上结果，则为：

$$\left.\begin{aligned} L_1&=\begin{bmatrix} L_{11} \\ 0 \end{bmatrix}, \\ L_2&=\begin{bmatrix} L_{12} \\ I \end{bmatrix}, \end{aligned}\right\} \tag{7-27}$$

$$M=[M_1 \mid M_2]。$$

其中：

$$\left.\begin{aligned} L_{11}&=M_1^{-1}, \\ L_{12}&=-L_{11}M_2。 \end{aligned}\right\} \tag{7-28}$$

矩阵 M的 M_1 部分，在正定矩阵的范围内可自由选择。但是，在特殊情况下，如果 $M_1=I$，则式7-28变成

$$L_{11}=I, \quad L_{12}=-M_2。$$

因此，L_{12}(或 M_2)是可以自由选择的矩阵。若设此矩阵为 $L_{12}=K$，则式 7-27 为：

$$\left.\begin{aligned} L_1&=\begin{bmatrix} I \\ \hdashline 0 \end{bmatrix}, \\ L_2&=\begin{bmatrix} K \\ \hdashline I \end{bmatrix}, \\ M&=[I \mid -K]。 \end{aligned}\right\} \tag{7-29}$$

在式 7-19、式 7-20的系统中，若把式 7-29 代入式 7-5，则有

$$\left.\begin{aligned} D &= A_{11} - KA_{21}, \\ E &= A_{12} - KA_{22} + DK, \\ G &= B_1 - KB_2。\end{aligned}\right\} \tag{7-30}$$

这样，就求得了$(n-m)$维的观测器。

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}z &= (A_{11} - KA_{21})z + [A_{12} - KA_{22} \\ &\quad + (A_{11} - KA_{21})K]y + (B_1 - KB_2)u, \\ x &= \begin{bmatrix} z + Ky \\ y \end{bmatrix}。\end{aligned}\right\} \tag{7-31}$$

式 7-31，被称为最小维观测器的标准形。

因为$(n-m)\times m$矩阵K，可以自由选择，所以问题是选择的K是否能使

$$D = A_{11} - KA_{21}$$

为稳定的矩阵。可以证明[53]，如果线性系统：

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= A_{11}x_1 \\ y &= A_{21}x_1 \end{aligned}\right\} \tag{7-32}$$

是能观测的，可通过选择的 K，使 D是稳定的。还可以证明，如果式 7-14、式 7-15 的系统是能观测 的，且 $\mathrm{rank}C = m$ 成 立，则 式 7-32的系统也是能观测的。为此，可通过选择 K 阵使得矩阵 D 为稳定矩阵。从而能实现稳定的最小维观测器。

［例7-1］ 吊车运动的线性状态微分方程和观测方程可 如 下描述

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\omega_0^2 & 0 & \omega_0^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0]x = x_1。$$

求这个系统稳定的最小维观测器的标准形。

解 立刻可确定，此系统是能观测的，显然，它满足式 $\mathrm{rank}C = m = 1$，因此，存在 $p = n - m = 2$ 维的稳定观测器。如果对上面两式进行坐标替换，则

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u,$$

$$y = [0 \quad 0 \quad 1]\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1,$$

即

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_0^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} -\omega_0^2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = [1 \quad 0], \qquad A_{22} = 0,$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad B_2 = 0,$$

因此，若设

$$K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix},$$

则

$$D = A_{11} - KA_{21} = \begin{bmatrix} -k_1 & \omega_0^2 \\ -k_2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E = A_{12} - KA_{22} + DK = \begin{bmatrix} (k_2 - 1)\omega_0^2 - k_1^2 \\ -k_1 k_2, \end{bmatrix},$$

$$G = B_1 - KB_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

因为

$$\det(SI - D) = s^2 + k_1 s + k_2 \omega_0^2,$$

所以，若选 $k_1 > 0, k_2 > 0$，则 D 为稳定矩阵。这样，可求得稳定的最小维观测器为

$$\frac{d}{dt} z = \begin{bmatrix} -k_1 & \omega_0^2 \\ -k_2 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} (k_2 - 1)\omega_0^2 - k_1^2 \\ -k_1 k_2 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ z_1 + k_1 y \\ z_2 + k_2 y \end{bmatrix}。$$

［例7-2］ 设控制系统的状态变量表达式为

$$\dot{x}=\left[\begin{array}{cc|c}4 & 4 & 4\\ -11 & -12 & -12\\ \hline 13 & 14 & 13\end{array}\right]x+\left[\begin{array}{c}1\\ -1\\ \hline 0\end{array}\right]u,$$

$$y=\left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 1\end{array}\right]x。$$

系统状态是完全能观测的，且 C 满秩，试确定一个最小维观测器。

解　对系统进行线性变换，令

$$T=\left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \hline 1 & 1 & 1\end{array}\right],\quad 则 T^{-1}=\left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \hline -1 & -1 & 1\end{array}\right],$$

$\bar{A}=TAT^{-1}$

$$=\left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \hline 1 & 1 & 1\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|c}4 & 4 & 4\\ -11 & -12 & -12\\ \hline 13 & 14 & 13\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \hline -1 & -1 & 1\end{array}\right]$$

$$=\left[\begin{array}{cc|c}0 & 0 & 4\\ 1 & 0 & -12\\ \hline 1 & 1 & 5\end{array}\right],$$

$$\bar{B}=TB=\left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \hline 1 & 1 & 1\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}1\\ -1\\ \hline 0\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}1\\ -1\\ \hline 0\end{array}\right],$$

$$\bar{C}=CT^{-1}=\left[\begin{array}{ccc}1 & 1 & 1\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \hline -1 & -1 & 1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc|c}0 & 0 & 1\end{array}\right]。$$

线性变换后系统的状态变量表达式为

$$\dot{\bar{x}}=\left[\begin{array}{cc|c}0 & 0 & 4\\ 1 & 0 & -12\\ \hline 1 & 1 & 5\end{array}\right]\bar{x}+\left[\begin{array}{c}1\\ -1\\ \hline 0\end{array}\right]u,$$

$$y=\left[\begin{array}{cc|c}0 & 0 & 1\end{array}\right]\bar{x}。$$

由于状态 $\bar{x}=(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \bar{x}_3)^T$，所以$\bar{x}_3$可由 y 直接提供，故只

要设计二阶观测器即可。

$$\bar{A}_{11}-KA_{21}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\end{bmatrix}[1 \quad 1]$$

$$=\begin{bmatrix}-k_1 & -k_1\\ 1-k_2 & -k_2\end{bmatrix},$$

此矩阵的特征方程为

$$\det[SI-(\bar{A}_{11}-K\bar{A}_{21})]=\det\begin{bmatrix}S+k_1 & -k_1\\ -1+k_2 & S+k_2\end{bmatrix}$$

$$=S^2+(k_1+k_2)S+k_1。$$

选定$(\bar{A}_{11}-K\bar{A}_{21})$的希望的特征值为 -3 和 -4，使此矩阵为稳定矩阵，则特征方程式为

$$(S+3)(S+4)=S^2+7S+12=0。$$

从而可得：　　　　$K_1=12,\quad K_2=-5。$

利用式7-31可得

$$\dot{\bar{z}}_1=\begin{bmatrix}-12 & -12\\ 6 & 5\end{bmatrix}\bar{z}_1+\left\{\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}12\\ 5\end{bmatrix}[0]\right\}u$$

$$+\left\{\begin{bmatrix}-12 & -12\\ 6 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12\\ -5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\ -12\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}12\\ -5\end{bmatrix}[5]\right\}y$$

$$=\begin{bmatrix}-12 & -12\\ 6 & 5\end{bmatrix}\bar{z}_1+\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}-140\\ 60\end{bmatrix}y,$$

$$\begin{bmatrix}\hat{\bar{x}}_1\\ \hat{\bar{x}}_2\end{bmatrix}=\bar{z}_1+\begin{bmatrix}12\\ -5\end{bmatrix}y。$$

另一状态变量为$\bar{x}_3=y$。所以，经过变换后的系统的状态估计为

$$\hat{\bar{x}}=\begin{bmatrix}\hat{\bar{x}}_1\\ \hat{\bar{x}}_2\\ \hat{\bar{x}}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{z}_1+Ky\\ \hline y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{z}_{11}+12y\\ \bar{z}_{12}-5y\\ y\end{bmatrix}.$$

原系统的状态估计为

$$\hat{x} = T^{-1}\hat{\bar{x}} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \hat{\bar{x}}_{11} + 12y \\ \hat{\bar{x}}_{12} - 5y \\ \hline y \end{array}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{\bar{x}}_{11} + 12y \\ \hat{\bar{x}}_{12} - 5y \\ -\hat{\bar{x}}_{11} - \hat{\bar{x}}_{12} - 6y \end{bmatrix}。$$

7.3 卡尔曼滤波器

一个实际的动态系统，除了确定性的输入$u(k)$之外，还存在随机干扰输入$w(k)$。当干扰很小时，可以忽略干扰而按确定性系统研究，当必须考虑干扰时，将作为随机系统研究，其状态$x(t)$和输出$y(t)$均为随机变量。我们的目的是要依据$y(t)$来估计$x(t)$。

7.3.1 最优估计问题

误差的方差为最小的估计称为最小方差估计，无偏的最小方差估计称为最优估计，实现最优滤波估计的系统称为卡尔曼滤波。

假定从时刻 1 起到时刻 k，对系统的输出作了 k 次测量，得到了以下测量向量：

$$z^k = \begin{bmatrix} z(1) \\ z(2) \\ \vdots \\ z(k) \end{bmatrix}。$$

我们希望依据整个 z^k，对第 i 时刻的状态$x(i)$进行估计，将此时的估计记为$\hat{x}(i|k)$，根据 i 与 k 的不同关系可将估计问题区分如下：

当$i<k$时，称为平滑(Smoothing)估计；

当$i=k$时，称为滤波(filtering)估计，$\hat{x}(i|k)$简记为$\hat{x}(k)$；

当$i>k$时，称为预测(prediction)估计。

卡尔曼滤波器是根据二个性能指标来设计的，其一是无偏性，其二是最小方差性。为说明无偏的最小方差估计即为最佳估计，下面将简单分析这二个性能指标。

设$x(k)$表示系统在k时刻的状态，$\hat{x}(k)$表示卡尔曼滤波器输出的状态。估计误差为

$$\tilde{x}(k)=x(k)-\hat{x}(k) \tag{7-33}$$

其中，$x(k)$、$\hat{x}(k)$和$\tilde{x}(k)$均为随机变量。这二个性能指标可以表示为：

(1) 无偏性：就是要求估算误差的统计平均值为零，即

$$E[\tilde{x}(k)]=0, \tag{7-34}$$

E表示数学期望。

(2) 最小方差性：由方差的定义有：

$$\begin{aligned}J&=E\{[\tilde{x}(k)-E(\tilde{x}(k))][\tilde{x}(k)-E(\tilde{x}(k))]^T\}\\&=E[\tilde{x}(k)\tilde{x}^T(k)]。\end{aligned} \tag{7-35}$$

根据方差的统计意义可知，方差乃是表示误差分布在平均值附近的离散程度。由此可知，使式7-35为最小，是表示估计误差分布在零点附近的分散程度为最小。这还表示了$\hat{x}(k)$从统计意义上最接近于$x(k)$。这样求出的估计$\hat{x}(k)$有最高的精度，故称为最优估计。

7.3.2 卡尔曼滤波公式

在最优性能指标确定之后，就需要解决最优估计如何计算的问题。由于确定性的输入函数对统计估算方法的结果精度不会产生影响，为此分析无确定性输入的离散线性系统：

$$x(k)=\phi(k,k-1)x(k-1)+\Gamma(k-1)W(k-1), \tag{7-36}$$

$$z(k)=H(k)x(k)+v(k), \qquad k\geqslant 1。 \tag{7-37}$$

其中，$\{W(k)\}$和$\{v(k)\}$是互不相关的零均值白噪声序列，且初始状态$x(0)$与$\{W(k)\}$、$\{v(k)\}$也不相关，即对任意k、j值，有如下条件：

$$E[W(k)]=0, \qquad E[W(k)W^T(j)]=Q(k)\delta_{kj},$$

$$E[v(k)]=0, \qquad E[v(k)v^T(j)]=R(k)\delta_{kj},$$

$$E[W(k)v^T(j)]=0,$$

$$E[x(0)]=\mu_0, \qquad \mathrm{Var}\,x_0=E[x(0)-\mu_0][x(0)-\mu_0]^T=p_0,$$

$$\mathrm{Cov}[x(0),W(k)]=0, \qquad \mathrm{Cov}[x(0),v(k)]=0。$$

在如上条件下来推导卡尔曼滤波公式，这种滤波公式不仅要保证最优性能指标的实现，而且就其计算方法而言，也是一种递推计算格式。它的基本思想是：假设测量到 $k-1$ 步时，已经得出了 $x(k-1)$ 的最优滤波估计 $\hat{x}(k-1)$，新测到 $z(k)$ 后，设想 $\hat{x}(k)$ 应是 $\hat{x}(k-1)$ 与 $z(k)$ 的某种线性函数，即

$$\hat{x}(k)=A\hat{x}(k-1)+Bz(k)。\tag{7-38}$$

然后，求矩阵 A、B 使得 $J=E[\tilde{x}(k)\tilde{x}^T(k)]$ 极小化。

因为 $\tilde{x}(k)=x(k)-\hat{x}(k)=x(k)-A\hat{x}(k-1)-Bz(k)$

$$\begin{aligned}&=\phi(k,k-1)x(k-1)+\Gamma(k-1)W(k-1)-A\hat{x}(k-1)\\&\quad-B\{H(k)[\phi(k,k-1)x(k-1)+\Gamma(k-1)W(k-1)]\\&\quad+v(k)\}\\&=[I-BH(k)][\phi(k,k-1)\tilde{x}(k-1)+\Gamma(k-1)W(k-1)]-Bv(k)+[\phi(k,k-1)-BH(k)\phi(k,k-1)\\&\quad-A]\hat{x}(k-1)。\end{aligned}\tag{7-39}$$

所以 $\tilde{x}(k)$ 的均方误差为

$$\begin{aligned}E[\tilde{x}(k)\tilde{x}^T(k)]&=E\{[x(k)-\hat{A}x(k-1)-Bz(k)][x(k)\\&\qquad-A\tilde{x}(k-1)-Bz(k)]^T\}\\&=[I-BH(k)][\phi(k,k-1)P(k-1)\phi^T(k,k-1)\\&\quad+\Gamma(k-1)Q(k-1)\Gamma^T(k-1)][I-BH(k)]^T\\&\quad+BR(k)B^T+[\phi(k,k-1)-BH(k)\phi(k,k-1)\\&\quad-A][E\hat{x}(k-1)\hat{x}^T(k-1)][\phi(k,k-1)\\&\quad-BH(k)\phi(k,k-1)-A]^T\\&=BH(k)\bar{P}(k)H^T(k)B^T-BH(k)\bar{P}(k)\\&\quad-\bar{P}(k)H^T(k)B^T(k)+\bar{P}(k)+BR(k)B^T+[\phi(k,k-1)\\&\quad-BH(k)\phi(k,k-1)-A][E\tilde{x}(k-1)\tilde{x}^T(k\\&\quad-1)][\phi(k,k-1)-BH(k)\phi(k)-A]^T。\end{aligned}\tag{7-40}$$

其中，$P(k-1)=E\tilde{x}(k-1)\tilde{x}^T(k-1)$，

$$\begin{aligned}\bar{P}(k)&=\phi(k,k-1)P(k-1)\phi^T(k,k-1)\\&\quad+\Gamma(k-1)Q(k-1)\Gamma^T(k-1)。\end{aligned}\tag{7-41}$$

$\bar{P}(k)$ 表示了一步外推误差方差矩阵，通常记为 $P(k|k-1)$，式7-40

五

可以利用配方法化为以下三项，即：

$$E[\tilde{x}(k)\tilde{x}^T(k)] = F_1 + F_2 + F_3 \tag{7-42}$$

其中 $F_1 = (B - \bar{P}(k)H^T(k)[H(k)\bar{P}(k)H^T(k)$

(7-47)

一步外推误差方差矩阵：

$$P(k|k-1)=\phi(k,k-1)P(k-1)\phi^T(k,k-1)$$
$$+\Gamma(k-1)Q(k-1)\Gamma^T(k-1)。\tag{7-48}$$

滤波误差的平方差矩阵：

$$P(k)=[I-K(k)H(k)]P(k|k-1),\tag{7-49}$$
$$P(0)=\mathrm{Var}\,x(0)=P_0。$$

应用以上公式计算时，必须先确定 μ_0、P_0，然后随着观测数据的不断增加，逐步递推计算求得 $\hat{x}(k)$，其顺序如下：

$$P(0)=P_0\longrightarrow P(1|0)\longrightarrow K(1)\xrightarrow[\mu_0]{}\hat{x}(1)\longrightarrow P(1)$$
$$\longrightarrow P(2|1)\longrightarrow K(2)\longrightarrow\hat{x}(2)\longrightarrow P(2)$$
$$\longrightarrow\cdots\longrightarrow K(k)\xrightarrow[y(k)]{}\hat{x}(k)。$$

离散系统卡尔曼滤波器的结构图如图 7-2 所示。

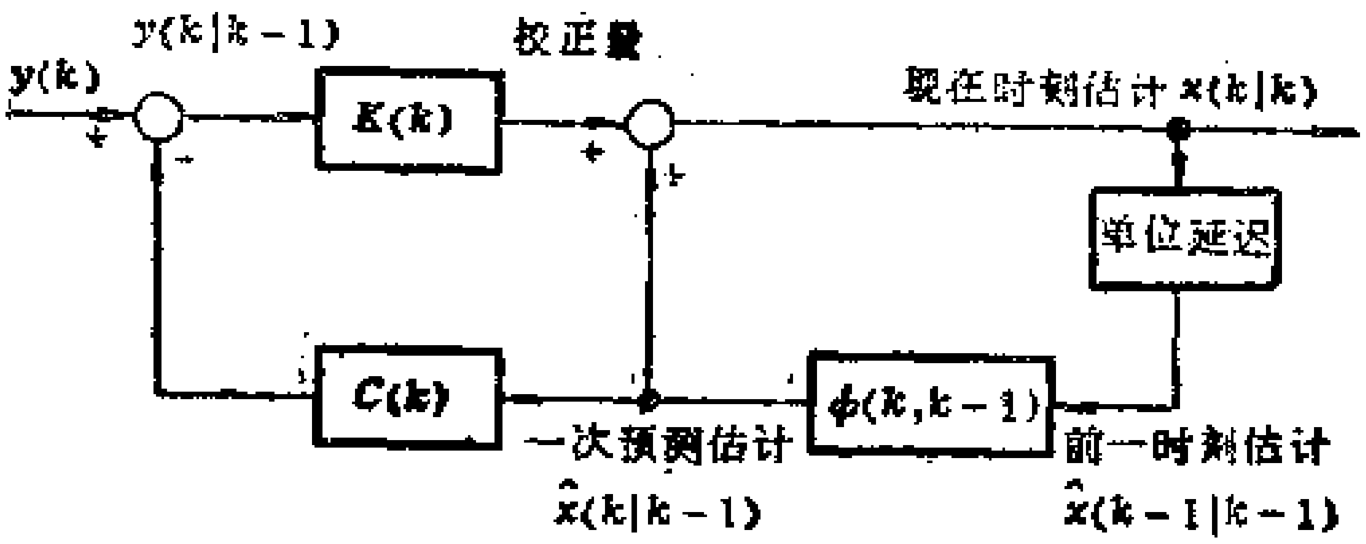


图 7-2 离散卡尔曼滤波器

图中 $\hat{x}(k|k-1)$ 表示一步预测估计，其计算公式为

$$\hat{x}(k|k-1)=\phi(k,k-1)\hat{x}(k-1),\tag{7-50}$$

由式 7-46 可以看出，滤波算法体现了“预测＋修正”的思想，“预测”由式 7-50 表示，式 7-46 是由预测估计 $\hat{x}(k|k-1)$ 和实测值 $z(k)$ 构成的“修正”估算法，$K(k)$ 乃是“修正”因子。式 7-47 给出了最佳“修正”因子。

由式 7-47、式 7-48 和式 7-49 可以看出 $K(k)$、$P(k|k-1)$ 和

$P(k)$等与观测数据无关，所以它们可以事先计算好，储存在计算机中，从而使实时计算加快。

在推导滤波计算公式中，我们曾假定 $\hat{x}(k)$ 可以表示成 $x(k)$ 和$\hat{x}(k-1)$的线性组合(见式 7-38)，由此可知，估计 $\hat{x}(k)$ 将是观测数据的线性组合。根据统计理论，当状态和观测数据向量以及它们的联合分布都是正态分布时，最小方差估计一定是线性估计，即是测量向量 z^k 的线性函数。所以我们所作的假定是合理的。

另外，只要初始条件是无偏的，即 $\hat{x}(0)=E\{x(0)\}=\mu_0$，可以证明上述卡尔曼滤波也为无偏的。因此，上述滤波器算法确实满足无偏性和最小方差性，即是最优估计。

卡尔曼滤波器作为一种动态估计，它本身就是一个动态系统，因此也存在稳定性问题，关于它的稳定性有如下结论：

(1) 如果给定的线性定常系统是能控能观的，那么根据给定的系统(状态方程及测量方程)得出的卡尔曼滤波器一定是渐近稳定的。

(2) 一个渐近稳定的卡尔曼滤波器，它的估算误差的方差(或协方差)随着 K 的增大将趋于某个稳定值，而且滤波增益$K(k+1)$也将趋于某个稳态值。这时称为定态滤波。

由这个结论可知，估算误差的方差(或协方差)不会精确到零，而是趋于某个常数，这样我们对估算误差既不能要求过高，也不用担心估算误差会越来越大。

由于滤波方程为线性方程，因此卡尔曼滤波又叫做线性、无偏、最小方差的实时递推滤波。

以上叙述的是离散线性系统的卡尔曼滤波公式，对于连续性系统也可以获得关于最优状态估计的卡尔曼递推估计算法。

设连续线性随机系统：

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+G(t)w(t), \qquad (7\text{-}51)$$

$$y(t)=C(t)x(t)+v(t)。 \qquad (7\text{-}52)$$

假定：

(1) $w(t)$和$v(t)$为互不相关的零均值白噪声，

$$
\left.\begin{aligned}
&E\{w(t)\}=0,\\
&\mathrm{Cov}\{w(t),w(\tau)\}=Q(t)\delta(t-\tau),\\
&E\{v(t)\}=0,\\
&\mathrm{Cov}\{v(t),v(\tau)\}=R(t)\delta(t-\tau),\\
&\mathrm{Cov}\{w(t),v(\tau)\}=0。
\end{aligned}\right\}\qquad(7\text{-}53)
$$

式中$Q(t)$为非负定对称矩阵，$R(t)$为正定对称矩阵。

(2) 初始状态 $x(t_0)$为随机向量，它与$w(t)$和$v(t)$独立，

$$
\left.\begin{aligned}
&E\{x(t_0)\}=m_x(t_0),\\
&\mathrm{Var}\{x(t_0)\}=R_x(t_0),\\
&\mathrm{Cov}\{x(t_0),w(t)\}=\mathrm{Cov}\{x(t_0),v(t)\}=0。
\end{aligned}\right\}\qquad(7\text{-}54)
$$

那么，关于状态 $x(t)$的滤波估计 $\hat{x}(t|t)$可由如下公式递推计算：

滤波估计：

$$\dot{\hat{x}}(t|t)=A(t)\hat{x}(t|t)+K(t)[y(t)-C(t)\hat{x}(t|t)]。\qquad(7\text{-}55)$$

滤波增益：

$$K(t)=P(t|t)C^T(t)R^{-1}(t)。\qquad(7\text{-}56)$$

滤波误差方差：

$$
\begin{aligned}
\dot{P}(t|t)&=P(t|t)A^T(t)+A(t)P(t|t)+G(t)Q(t)G^T(t)\\
&\quad-K(t)C(t)P(t|t)\\
&=P(t|t)A^T(t)+A(t)P(t|t)+G(t)Q(t)G^T(t)\\
&\quad-P(t|t)C^T(t)R^{-1}(t)C(t)P(t|t)。
\end{aligned}\qquad(7\text{-}57)
$$

此方程称为黎卡提方程。

初始条件：

$$
\begin{aligned}
&\hat{x}(t_0)=\hat{x}(t_0|t_0)=m_x(t_0),\\
&\mathrm{Var}\{\hat{x}(t_0)-\hat{x}(t_0)\}=P(t_0|t_0)。
\end{aligned}\qquad(7\text{-}58)
$$

关于上述公式的推导此处从略。可以证明，上述滤波估计确是无偏估计。只要初始估计满足下式

$$
\begin{aligned}
\hat{x}(t_0)&=E\{\hat{x}(t_0|t_0)\}\\
&=E\{\hat{x}(t_0)\}=m_x(t_0),
\end{aligned}\qquad(7\text{-}59)
$$

则对一切$t\geqslant t_0$，等式

$$E\{\hat{x}(t|t)\}=E\{\hat{x}(t)\}\qquad(7\text{-}60)$$

一定成立。

当系统是线性定常的、过程噪声和观测噪声是弱平稳的(Q、R 非时变的)，且两者不相关，观测早已开始($t_0 \to -\infty$，或已很久)时，那么，系统中的过程是平稳的，而状态估计问题也变成平稳问题，所有瞬态过程都早已结束，可以忽略滤波器中的起始的瞬变过程。因此，$\dot{P}(t|t)=0$，$P(t|t)=P=$常数矩阵，方差微分方程式7-57变成代数方程

$$0=PA^T+AP+GQG^T-PC^TR^{-1}CP。\tag{7-61}$$

增益矩阵是常值：

$$K=PC^TR^{-1}。\tag{7-62}$$

滤波估计方程变为

$$\dot{\hat{x}}(t)=A\hat{x}(t)+K[y(t)-C\hat{x}(t)]。\tag{7-63}$$

此时称为平稳卡尔曼滤波，或称定常卡尔曼滤波器。

[例7-3] 在三维空间中，运动目标的一个坐标为$x(t)$，速度为$\dot{x}(t)$，加速度为$\ddot{x}(t)$，考察只能测定位置的情况。在此，设

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{bmatrix},$$

目标的系统方程可表示为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t),$$

$$y=x(t)=[1\ \ 0\ \ 0]\boldsymbol{x}+v(t)。$$

其中，$v(t)$是测定误差，$u(t)$是目标加速度。假定$u(t)$是独立的正态白色噪色，

$$E\{u(t)\}=0,\quad E\{u(t)u(\tau)\}=Q\delta(t-\tau),$$

$$E\{v(t)\}=0,\quad E\{v(t)v(\tau)\}=R\delta(t-\tau),$$

试设计跟踪目标的定常卡尔曼滤波器。

解 在这种情况下，黎卡提定常矩阵式7-61变成

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{12} & p_{13} & 0 \\ p_{12} & p_{23} & 0 \\ p_{33} & p_{33} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q \end{bmatrix}$$

$$-R^{-1}\begin{bmatrix} p_{12}^2 & p_{11}p_{12} & p_{11}p_{13} \\ p_{12}p_{11} & p_{22}^2 & p_{12}p_{13} \\ p_{13}P_{11} & p_{13}p_{12} & p_{13}^2 \end{bmatrix} = 0。$$

据此，可推导出联立的方程为

$$\left.\begin{aligned} &2p_{12} - R^{-1}p_{11}^2 = 0,\quad Q - R^{-1}p_{13}^2 = 0, \\ &2p_{23} - R^{-1}p_{12}^2 = 0,\quad p_{33} - R^{-1}p_{13}p_{12} = 0, \\ &p_{23} - R^{-1}p_{13}p_{11} = 0,\ p_{22} + p_{13} - R^{-1}p_{11}p_{12} = 0。\end{aligned}\right\} \tag{7-64}$$

如果在左侧的三个式子中，消去 p_{23} 和 p_{12}，则可得

$$p_{11}^3 = 8R^2p_{13}。\tag{7-65}$$

由于必有 $p_{11} \geqslant 0$，所以 $p_{13} \geqslant 0$。从式 7-64 右侧第一式得

$$p_{13} = \sqrt{QR} = R\alpha^3。\tag{7-66}$$

这里，设

$$\alpha = Q^{1/6}R^{-1/6}。$$

若将式 7-66 代入式 7-65，则有

$$p_{11} = 2R\alpha。$$

下面，把诸式按次序分别代入式 7-64，最终可求得

$$\mathbf{P} = R\alpha\begin{bmatrix} 2 & 2\alpha & \alpha^2 \\ 2\alpha & 3\alpha^2 & 2\alpha^3 \\ \alpha^2 & 2\alpha^3 & 2\alpha^4 \end{bmatrix}。$$

于是，定常卡尔曼滤波器可设计成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{x} = \begin{bmatrix} -2\alpha & 1 & 0 \\ -2\alpha^2 & 0 & 1 \\ -\alpha^3 & 0 & 0 \end{bmatrix}\hat{x} + \begin{bmatrix} 2\alpha \\ 2\alpha^2 \\ \alpha^3 \end{bmatrix}y。$$

此式可用图 7-3 来表示。

卡尔曼滤波还可用来估计参数。

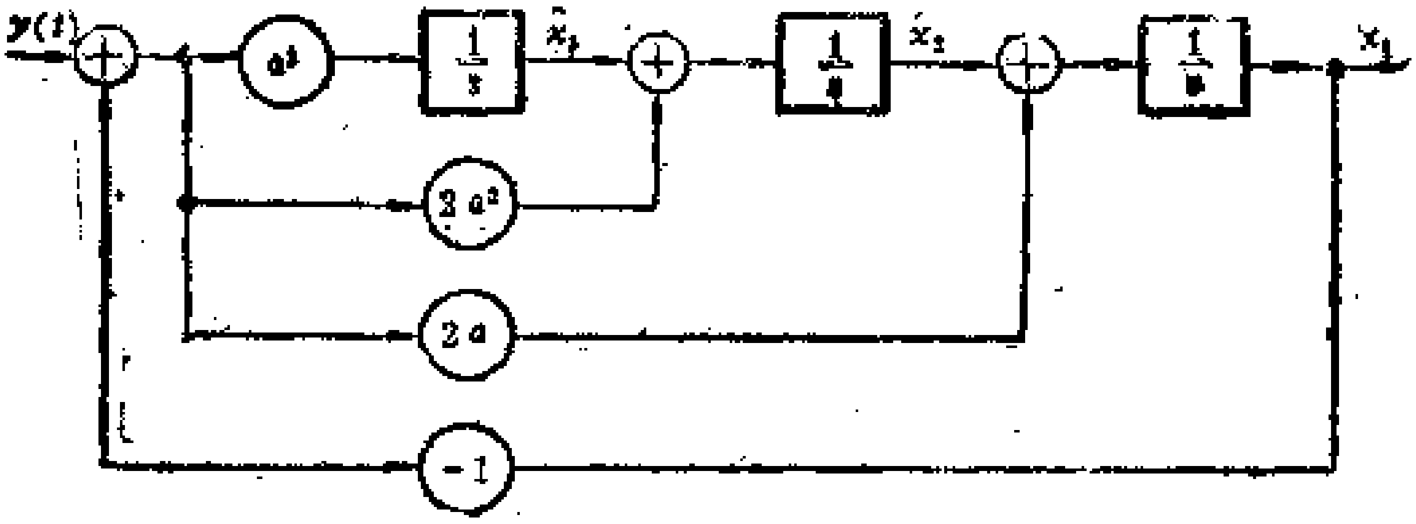


图 7-3 跟踪系统的卡尔曼滤波器

[例7-4] 设系统

$$y(t)+a(t-1)y(t-1)=b(t-1)u(t-1)+e(t)。\tag{7-67}$$

式中，

$$a(t+1)=a(t)+v_1(t),\tag{7-68}$$

$$b(t+1)=b(t)+v_2(t)。\tag{7-69}$$

$\{e(t)\}$、$\{v_1(t)\}$和$\{v_2(t)\}$是分别具有方差r_2、r_{11}和 r_{22} 的离散时间高斯白噪声。试证明卡尔曼定理能用来得到参数 a 和 b 的估计。

解 本题是参数辨识问题。引入新变量

$$x(t)=\begin{bmatrix}a(t)\\b(t)\end{bmatrix},\quad v(t)=\begin{bmatrix}v_1(t)\\v_2(t)\end{bmatrix},$$

$$H(t)=[-y(t-1)\quad u(t-1)]。$$

则式 7-68、式 7-69和式 7-67 可改写为

$$x(t+1)=x(t)+v(t),\tag{7-70}$$

$$y(t)=H(t)x(t)+e(t)。\tag{7-71}$$

给定数据为

$$\Phi=1, H(t)=[-y(t-1)\quad u(t-1)],$$

$$Q=\mathrm{Cov}[v(t),v(t)]=\begin{bmatrix}r_{11}&0\\0&r_{22}\end{bmatrix},\tag{7-72}$$

$$R=r_2。$$

根据方程式 7-70、式 7-71和给定数据式 7-72，有如下估计公式：

$$\hat{x}(t+1)=\hat{x}(t)+K(t)[y(t)-H(t)\hat{x}(t)],\tag{7-73}$$

$$K(t)=P(t)H(t)[H(t)P(t)H^T(t)+r_2]^{-1},\tag{7-74}$$

$$P(t+1)=[I-K(t)H(t)]P(t)+Q。\tag{7-75}$$

当给定了初始条件 $\hat{x}(t_0)$、$P(t_0)$，输入控制$\{u(t)\}$值、测量$y(t)$值，就可用式 7-73 ～式 7-75 计算出估计值 $\hat{x}(t)$。从而确定出对 $a(t)$ 和 $b(t)$ 的估计。因为 $H(t)$ 中包括了控制量 $u(t-1)$ 和测量值$y(t-1)$，所以$K(t)$ 和$P(t+1)$不能预先算出，只能逐步在线测得。

8 随机控制

8.1 引言

当系统具有随机输入、随机干扰或随机特性(参数)时，系统的状态、输出和控制量将也是随机过程，这类系统称为随机系统。显然，实际的系统一般都是随机系统。对于随机系统的控制问题就是随机控制问题。

在 6 中已经介绍了确定性系统的控制问题，然而，通常的确定性系统的控制理论并非能简单地推广到随机系统中来，下面将以实例说明。

设一实际系统：

$$\dot{x}_s(t) = u_s(t) + v, \tag{8-1}$$

$$x_s(0) = 1。 \tag{8-2}$$

上式中，v为一个未知扰动。

性能指标为 $$J_s = \int_0^\infty [x_s^2(t) + u_s^2(t)]dt。 \tag{8-3}$$

若在求解实际的问题时，未知扰动不予考虑。因此，在设计中采用模型

$$\dot{x}_m(t) = u_m(t), \tag{8-4}$$

$$x_m(0) = 1。 \tag{8-5}$$

性能指标为 $$J_m = \int_0^\infty [x_m^2(t) + u_m^2(t)]dt。 \tag{8-6}$$

为了求出使 J_m 最小的 $u_m(t)$，可以如下计算

$$J_m = \int_0^\infty [x_m^2(t) + u_m^2(t)]dt$$

$$= \int_0^\infty [x_m^2(t) + \dot{x}_m^2(t)]dt$$

$$= \int_0^{\infty} [x_m(t) + \dot{x}_m(t)]^2 dt - 2\int_0^{\infty} x_m(t)\dot{x}_m(t)\,dt$$

$$= x_m^2(0) - x_m^2(\infty) + \int_0^{\infty} [x_m(t) + u_m(t)]^2 dt。 \tag{8-7}$$

由于 J 为有限值，且 $J \geqslant 0$，所以当 $u_m(t) = -x_m(t)$ 时，J 将取最小值，$J = 2\int_0^{\infty} x_m^2(t)\,dt$。且可以证明：$x(\infty) = 0$。由式 8-7 可得：

$$\min J = x_m^2(0) = 1 \tag{8-8}$$

控制律为

$$u_m(t) = -x_m(t)。 \tag{8-9}$$

由式 8-4 可以求出：

$$u_m(t) = -e^{-t}。 \tag{8-10}$$

由式 8-9 表示的控制律是闭环形式，即状态反馈的形式。由式 8-10表示的是开环控制律。显然，无论是开环还是闭环控制，性能指标的最小值不变。当用上述模型求出的开环或闭环控制律作为原系统的控制律时，其性能指标如下：

对于开环控制 $u_m(t) = -e^{-t}$，令 $u_s(t) = u_m(t)$ 代入式 8-1 可得：

$$\dot{x}_s(t) = u_s(t) + v = -e^{-t} + v,$$

所以

$$x_s(t) = e^{-t} + vt。 \tag{8-11}$$

则

$$J_s = 1 + 2v + \int_0^{\infty} v^2 t^2 dt = \infty。 \tag{8-12}$$

对于闭环控制 $u_s(t) = -x_s(t)$，代入式 8-1 可得：

$$\dot{x}_s(t) = u_s(t) + v$$
$$= -x_s(t) + v。$$

所以

$$x_s(t) = e^{-t} + v(1 - e^{-t}),$$
$$u_s(t) = -e^{-t} - v(1 - e^{-t})。$$

则

$$J_s = 1 + 2v - 3v^2 + 2\int_0^{\infty} v^2 dt = \infty。 \tag{8-13}$$

由式 8-12 和式 8-13 可知，当实际系统受到扰动作用时，如果忽略了扰动（即使是很小的扰动），用上述确定性系统的方法来设

计控制方案，不管是闭环控制还是开环控制，它们的性能指标都很差，不能达到最小值的要求。此时，必须采用随机控制方案。

从上面确定性系统求解过程可以看出，最优反馈是简单地把状态空间映射到控制变量空间的一个函数，在最优反馈中没有动态问题。以后，我们将会看到，在随机控制中，最优反馈控制律中的状态是需要估计的，此时将存在动态过程。

总之，随机系统由于是实际存在系统的普遍形式，而且这种系统的控制理论并不能简单地由确定性系统的控制理论导出，因此，随机控制理论的研究和建立就成为十分重要的问题。

随机控制理论在40年代就已发展起来，当时美国麻省理工学院(MIT)用随机控制方法综合了火力控制系统。詹姆斯(James)，尼可尔斯(Nichols)和菲力普(phillips)采用参数最优化方法来设计跟踪雷达。

维纳、柯尔莫哥洛夫及卡尔曼的滤波和预测理论是随机控制理论的柱石，它为从具有随机干扰的观测中，提取真正的状态信息提供了理论依据。近年来，随机控制理论获得了迅速发展，它与控制理论的其它领域密切相关，如自适应控制，自学习系统理论等等。在它的理论和应用中，还存在相当的困难，但是它的前景是令人瞩目的。

8.2 随机控制问题的描述

随机控制主要包括以下五方面的内容：

(1) 数学模型的建立。与确定性模型相比，随机模型的建立更为复杂，其困难在于如何描述随机因素以及如何在系统的数学方程中表达出来。对于离散系统模型的建立较为简单，但对于连续系统的建立，就必须引用随机微分方程及随机积分的概念。

(2) 随机系统分析。即分析系统在随机作用下的统计特性。此时，将较多地应用随机过程和统计分析的理论。

(3) 参数最优化。假设系统的结构已确定，但参数未知，调

整参数使系统按照给定的性能指标最优化。

(4) 系统的状态估计。

(5) 控制律的确定。如果系统已给定，根据性能指标或一定的准则，确定控制律。若控制律使性能指标取极小值，就是最优随机控制。

本章中，主要介绍随机最优控制问题。以下将给出随机最优控制问题的数学描述。

设一系统由如下随机差分方程描写：

$$\mathbf{x}(t+1)=\Phi\mathbf{x}(t)+\Gamma\mathbf{u}(t)+\mathbf{v}(t), \tag{8-14}$$

$$\mathbf{y}(t)=\theta\mathbf{x}(t)+\mathbf{e}(t)。 \tag{8-15}$$

其中，$t\in T=\{\cdots,-1,0,1,\cdots\}$，$\mathbf{x}$是 $n\times1$ 状态向量，u 是 $p\times1$ 控制向量，$\mathbf{y}$是 $r\times1$ 输出向量，而$\{\mathbf{v}(t),t\in T\}$及$\{\mathbf{e}(t),t\in T\}$ 为独立正态随机向量的序列，其均值为零，协方差为

$$\mathrm{Cov}[\mathbf{v}(t),\mathbf{v}(t)]=R_1,$$

$$\mathrm{Cov}[\mathbf{v}(t),\mathbf{e}(t)]=0,$$

$$\mathrm{Cov}[\mathbf{e}(t),\mathbf{e}(t)]=R_2。$$

矩阵Φ、Γ、θ、R_1和 R_2 可以与时间有关。假定 $\mathbf{e}(t)$ 和 $\mathbf{v}(t)$ 都独立于 $\mathbf{x}(t)$，而初始状态 $\mathbf{x}(t_0)$ 是正态分布，其均值和协方差为：

$$\left.\begin{aligned}&E\mathbf{x}(t_0)=m_0,\\&\mathrm{Cov}[\mathbf{x}(t_0),\mathbf{x}(t_0)]=R_0。\end{aligned}\right\} \tag{8-16}$$

且设 R_0 和 R_1 是非负定矩阵，R_2 是正定矩阵。系统的性能由如下标量损失函数表征：

$$l=\mathbf{x}^T(N)Q_0\mathbf{x}(N)+\sum_{t=t_0}^{N-1}[\mathbf{x}^T(t)Q_1\mathbf{x}(t)+u^T(t)Q_2u(t)]。$$

其中，Q_0,Q_1 是对称且非负定矩阵，Q_2 是正定矩阵。所有矩阵均可与时间有关。

因为 l 是随机变量，直接考虑它的最小化问题是没有意义的，为此我们将选取期望损失作为性能指标。即选取 El 为性能指标。E表示数学期望。

与确定性系统的最优控制类似，我们也必须明确容许控制的含义。

若在式 8-15 中 θ 为单位矩阵，$e(t)=0$，则 $y(t)=x(t)$ 这意味着时刻 t 的输出信号将给出状态向量的精确值。这种情况称为完全状态信息。

在这种情况下，控制律是把状态空间 R^n 映射到控制空间 R^p 的一个函数。

然而，在大多数情况下，我们并不能确切地知道状态变量，此时称为不完全状态信息。在这种情况下，控制信号在时刻 t 的值是到时刻 t 为止的所有观测输出的函数，用 $\mathscr{Y}_t$ 表示观测输出，即：

$$\mathscr{Y}_t^T=[y^T(t_0),y^T(t_0+1),\cdots,y^T(t)]。$$

因此控制策略是这样一个函数，它将观测输出所构成的空间映射到可能的控制动作所构成的空间。

对于连续系统也可提出类似的问题，上述问题就是著名的"线性二次型正态问题"亦称 LQG 问题。随机控制问题的一般提法如下：

设离散时间随机系统的数学模型的一般式为

$$x(k+1)=f[x(k),u(k),w(k),k],$$
$$k=0,1,\cdots,N-1; \tag{8-17}$$

$$y(k)=g[x(k),v(k),k],$$
$$k=0,1,\cdots,N。\tag{8-18}$$

或

$$x(k+1)=\Phi[x(k),u(k),k]+\Gamma[x(k),k]w(k),$$
$$k=0,1,\cdots,N-1; \tag{8-19}$$

$$y(k)=g[x(k),k]+v(k),$$
$$k=0,1,\cdots,N。\tag{8-20}$$

在上述各式中，认为 N 是给定的。

性能指标为

$$J=E\{L[X^N,U^{N-1},N]\}。\tag{8-21}$$

式中 L 为实值目标函数，

$$X^N \triangleq \{x(i), i=0,\cdots,N\}$$

$$U^{N-1} \triangleq \{u(i), i=0,\cdots,N-1\}$$

假如L是可加的，则目标函数 L 可写成

$$L[X^N, U^{N-1}, N] = \sum_{i=0}^{N-1} L_i[x(i), u(i)] + L_N[x(N)]。 \quad (8\text{-}22)$$

在二次型最优控制问题中，L 为二次型函数，其形式和确定性系统中一样。

由于现在研究的系统具有不确定因素，系统是随机的，所以 L 也是一个随机变量。因此，所采用的性能指标是目标函数的数学期望。

由上可知，随机最优控制问题是：对于式8-17、式 8 -18或式8-19、式 8-20 的系统，求出容许控制策略，使性能指标 J(式8-21)达到极小。

随机系统与确定性系统有很大不同，在随机最优控制问题中，所有有关约束均包含在性能指标 J 及如何利用观测数据的问题中。

由于对观测获得的信息所利用的方式不同，尤其根据对将来的观测信息的利用情况，随机最优控制可以有开环控制，反馈控制(闭环控制)等。

8.3 最小方差控制

对于一个随机系统，若控制的目的在于使输出方差为最小，这种控制策略就称为最小方差控制。这种控制策略在工业上有着广泛的应用。例如著名的瑞典学者 K. J. 奥斯特隆姆成功地将最小方差控制策略用于造纸机上基准重量的控制。[8]以下将对离散时间随机系统的最小方差控制器作一简单的介绍

设如下 CARMA 模型：

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-k) + C(q^{-1})e(t)。 \quad (8\text{-}23)$$

式中，

$$
\left.\begin{aligned}
A(q^{-1}) &= 1 + a_1 q^{-1} + \cdots + a_{n_a} q^{-n_a}, \\
B(q^{-1}) &= b_0 + b_1 q^{-1} + \cdots + b_{n_b} q^{-n_b}, b_0 \neq 0, \\
C(q^{-1}) &= 1 + c_1 q^{-1} + \cdots + c_{n_c} q^{-n_c}。
\end{aligned}\right\} \tag{8-24}
$$

$y(t)$是受控系统的输出，$u(t)$是受控系统的控制输入，$\{e(t)\}$是均值为零、方差为σ^2的随机变量序列，k是过程响应的滞后时间，它是采样周期的整数倍，$k\geqslant 1$。假定k已知，向后平移算子多项式$A(q^{-1})$，$B(q^{-1})$，$C(q^{-1})$的阶次和系数均已知，多项式的根称为多项式的零点。设$B(\cdot)$的所有零点都位于单位圆外（此时称系统为最小相位系统），$C(\cdot)$的所有零点都位于单位圆外，性能指标表示为：

$$
J = E\{y^2(t+k)\}。 \tag{8-25}
$$

设容许控制是t时刻及t时刻以前所有输出值（$y(t)$，$y(t-1)$，…）与所有过去时刻控制序列（$u(t-1)$，$u(t-2)$，…，）的函数。要求容许控制律使J为最小。

为了求解这一问题，首先将$C(q^{-1})$作如下分解：

$$
C(q^{-1}) = A(q^{-1})F'(q^{-1}) + q^{-k}G(q^{-1})。 \tag{8-26}
$$

式中，

$$
\left.\begin{aligned}
F'(q^{-1}) &= 1 + f'_1 q^{-1} + \cdots + f'_{k-1} q^{-k+1}, \\
G(q^{-1}) &= g_0 + g_1 q^{-1} + \cdots + g_{n_a-1} q^{-n_a+1}, \\
F(q^{-1}) &= B(q^{-1})F'(q^{-1}) \\
&= f_0 + f_1 q^{-1} + \cdots + f_{n_b+k-1} q^{-(n_b+k-1)}。
\end{aligned}\right\} \tag{8-27}
$$

$F'(q^{-1})$和$G(q^{-1})$可以利用式 8-26 求得。

由式 8-23 可得：

$$
y(t+k) = \frac{B}{A}u(t) + \frac{C}{A}e(t+k)。 \tag{8-28}
$$

上式中，多项式的符号均用第一个大写字母表示，即$A(q^{-1})$简写为A，B、C类同。

将式 8-26 代入上式得：

$$
y(t+k) = F'e(t+k) + \frac{B}{A}u(t) + \frac{G}{A}e(t)。 \tag{8-29}
$$

由式 8-23 得：

$$e(t)=\frac{A}{C}y(t)-\frac{B}{C}u(t-k)。\tag{8-30}$$

将上式代入式 8-29 并利用式 8-26 得：

$$y(t+k)=F'e(t+k)+\frac{1}{C}[Fu(t)+Gy(t)]。\tag{8-31}$$

所以，

$$E\{y^2(t+k)\}=E\{[F'e(t+k)]^2\}+E\left\{\left[\frac{F}{C}u(t)+\frac{G}{C}y(t)\right]^2\right\}$$
$$+2E\left\{[F'e(t+k)]\left[\frac{F}{C}u(t)+\frac{G}{C}y(t)\right]\right\}。$$

(8-32)

根据噪声的独立性可以推断出，$t+1$时刻以后的噪声对 t 时刻以前的控制输入和系统输出的观测量是独立的。因此式 8-32 中等号右边第三项为零。由此可知，

$$E\{y^2(t+k)\}\geqslant E\{[F'e(t+k)]^2\}。\tag{8-33}$$

当
$$u(t)=-\frac{G}{BF'}y(t)=-\frac{G}{F}y(t)\tag{8-34}$$

时，式 8-33 等号成立，此时，

$$\min E\{y^2(t+k)\}=E\{[F'e(t+k)]^2\}$$
$$=(1+f_1'^2+f_2'^2+\cdots+f'^2_{k-1})\sigma^2$$

而 $y(t)=F'e(t)=e(t)+f_1'e(t-1)+\cdots+f'_{k-1}e(t-k+1)$，即最小方差调节系统的调节误差为$e(t)$的 $k-1$ 阶滑动平均过程。闭环系统方程为：

$$y(t)=\frac{CF}{AF+q^{-k}BG}e(t)。\tag{8-35}$$

［例8-1］ 设由

$$y(t)=\frac{1}{1+0.5q^{-1}}u(t-1)+\frac{1+0.7q^{-1}}{1-0.2q^{-1}}e(t)\tag{8-36}$$

所描写的随机系统，式中$e(t)$是独立正态(0，1)的随机变量序列。

试求最小方差控制策略。

解 由式 8-36 得：

$$A(q^{-1})y(t)=B(q^{-1})u(t-1)+C(q^{-1})e(t)。$$

式中，

$$A(q^{-1})=1+0.3q^{-1}-0.1q^{-2},$$
$$B(q^{-1})=1-0.2q^{-2},$$
$$C(q^{-1})=1+1.2q^{-1}+0.35q^{-2}。$$

由上式可知，$n_a=n_b=n_c=2, k=1$，因此

$$F'(q^{-1})=1,$$
$$G(q^{-1})=g_0+g_1q^{-1}。$$

由 $C=AF'+q^{-1}G$ 可求得：

$$1+1.2q^{-1}+0.35q^{-2}=(1+0.3q^{-1}-0.1q^{-2})+q^{-1}(g_0+g_1q^{-1}),$$

从而，$g_0=0.9, g_1=0.45$。

所以最小方差控制律为

$$u(t)=-\frac{G}{F}y(t)=-\frac{G}{BF'}y(t)$$
$$=-\frac{0.9+0.45q^{-1}}{1-0.2q^{-1}}y(t)$$
$$=0.2u(t-1)-0.9y(t)-0.45y(t-1), \tag{8-37}$$

$$y(t)=F'e(t)=e(t), \tag{8-38}$$

$$\mathrm{Var}\,y(t)=1。$$

[例8-2] 设有如下方程描写的系统：

$$y(t)+a_1y(t-1)=b_0u(t-1)+\xi(t). \tag{8-39}$$

由式 8-23 和式 8-24 可知：

$$k=1;$$
$$A=1+a_1q^{-1}, \qquad n_a=1;$$
$$B=b_0, \qquad n_b=0;$$
$$C=1, \qquad n_c=0;$$

从而有 $F' = 1, G = g_0, F = b_0$。

由式 8-26 可得： $g_0 = -a_1$。

所以最小方差控制律为

$$u(t) = -\frac{G}{F}y(t) = \frac{a_1}{b_0}y(t)。\qquad (8\text{-}40)$$

这时，输出方差为 $E\{y^2(t)\} = \sigma^2$，

输出为 $y(t) = \xi(t)$。

由此例可以看出，如果 $|b_0|$ 很小时，最小方差控制器的控制作用可能很大。这常常是工程上不允许的。所以，控制信号可能过大是最小方差调节器的一个缺点。

［例8-3］ 设由

$$y(t) + a_1 y(t-1) = u(t-1) + b_1 u(t-2) + e(t) + c_1 e(t-1) \qquad (8-41)$$

描述的受控系统，这里，

$$k = 1,$$
$$A = 1 + a_1 q^{-1}, \qquad n_a = 1;$$
$$B = 1 + b_1 q^{-1}, \qquad n_b = 1;$$
$$C = 1 + c_1 q^{-1}, \qquad n_c = 1。$$

进而有：

$$F' = 1, G = g_0, F = 1 + b_1 q^{-1}。$$

由恒等式 8-26 得：

$$G = g_0 = c_1 - a_1。$$

故最小方差控制策略为

$$u(t) = -\frac{G}{F}y(t) = \frac{a_1 - c_1}{1 + b_1 q^{-1}}y(t)。\qquad (8\text{-}42)$$

这时，闭环系统方程为

$$y(t) = F' e(t) = e(t)。\qquad (8\text{-}43)$$

由此可见，在理论上，不论是 $|b_1| < 1$ 的最小相位系统，还是 $|b_1| \geqslant 1$ 的非最小相位系统，只要参数是固定不变的，所得闭环调节系统总是最优的。但是，常常是用估计参数来代替控制策略中的相应参

数，参数不可避免地具有误差。例如，在实现时，若设控制策略式8-42中的系数 b_1 实为b_1'，则式 8-42 变为

$$u(t) = \frac{a_1 - c_1}{1 + b_1' q^{-1}} y(t),$$

即
$$G = c_1 - a_1,$$
$$F = 1 + b_1' q^{-1}。$$

将它们代入式 8-35，经整理后，得闭环输出方程为

$$y(t) = \frac{1 + (b_1' + c_1) q^{-1} + b_1' c_1 q^{-2}}{1 + (b_1' + c_1) q^{-1} + (a_1 b_1' - a_1 b_1 + b_1 c_1) q^{-2}} e(t),$$

可见，闭环特征方程(传递函数的分母)为

$$F_s(q^{-1}) = 1 + (b_1' + c_1) q^{-1} + (a_1 b_1' - a_1 b_1 + b_1 c_1) q^{-2},$$

令 $\Delta b = b_1' - b_1$

则 $$F_s(q^{-1}) = 1 + (b_1 + \Delta b + c_1) q^{-1} + (a_1 \Delta b + b_1 c_1) q^{-2}。 \quad (8\text{-}44)$$

当受控系统是开环稳定的，然而是非最小相位系统时，即当$|c_1|<1$、$|a_1|<1$、$|b_1|\geqslant 1$时，有

$$(1 - c_1) > 0, (1 - a_1) > 0,$$
$$(1 + c_1) > 0, (1 + a_1) > 0,$$

而由式 8-44 可知，

$$F_s(0) = 1 > 0,$$
$$F_s(-1) = (1 - b_1)(1 - c_1) - (1 - a_1)\Delta b,$$
$$F_s(+1) = (1 + b_1)(1 + c_1) + (1 + a_1)\Delta b。$$

这样，在$b_1 \geqslant 1$，$\Delta b > 0$的条件下，得

$$F_s(-1) < 0;$$

在$b_1 \leqslant -1$，$\Delta b < 0$的条件下，得

$$F_s(+1) < 0。$$

故由界值定理可知，闭环特征方程$F_s(q^{-1})$有零点位于单位圆上或单位圆内，所以，闭环系统是不稳定的。换句话说，对于非最小相位系统，当采用最小方差控制策略时，只要受控过程参数有变化，

或者控制策略中的参数不能精确地等于相应的受控过程参数，这样，闭环系统不仅没有最优性，连稳定性也保证不了。这也是最小方差控制策略的另一个缺点。

为了克服最小方差控制的上述缺点，人们又研究了广义最小方差控制器，它具有更为广泛的适应能力。

设有由模型式 8-23，

$$y(t)=\frac{q^{-k}B}{A}u(t)+\frac{C}{A}e(t) \tag{8-45}$$

描述的受控系统，假定：

(1) 受控过程响应滞后时间k，以及后向平移算子多项式A、B和C的阶次和系数都是已知的；

(2) 多项式$C(\cdot)$的所有零点都位于单位圆外；

(3) $\{e(t)\}$是均值为零的不相关随机变量序列。

要求寻找一种容许控制策略，使目标函数。

$$J_1=E\{[\Gamma y(t+k)-\Psi y_r(t)]^2+[\Lambda' u(t)]^2\}。 \tag{8-46}$$

达到极小。其中Γ,Ψ,Λ'均为向后平移算子多项式，Γ为首一多项式；$y_r(t)$为伺服输入，是已知函数。

显然，目标函数J_1是比较复杂的，直接求解上述问题相当困难，不过，若引入一个辅助系统，则上述问题可转化为类似于寻求最小方差调节器的问题。

设辅助系统模型为

$$x(t+k)\triangleq\Gamma y(t+k)-\Psi y_r(t)+\Lambda u(t)。 \tag{8-47}$$

式中，$x(t)$为辅助输出，Λ为控制加权多项式

$$\Lambda=\frac{\lambda'_0}{b_0}\Lambda', \tag{8-48}$$

其中λ'_0为多项式Λ'的首项系数。将式 8-45 代入式 8-47 中，经整理后，可得

$$x(t+k)=\left(\frac{\Gamma B}{A}+\Lambda\right)u(t)+\frac{\Gamma C}{A}e(t+k)-\Psi y_r(t)。 \tag{8-49}$$

对于辅助系统，相应的问题提法为：对于由上述模型描述的辅助系统，要求寻找一种容许控制策略，使目标函数

$$J_2 = E\{x^2(t+k)\} \tag{8-50}$$

达到极小。当$y_r(t)=0$时，上述问题，就是寻求最小方差控制策略问题。当$y_r(t)\neq 0$，可把$\Psi y_r(t)$作为前馈引入，不影响问题的性质。因此，在一般情况下，上述所求控制策略可称为广义最小方差控制策略。

广义最小方差控制策略的定理如下。

定理8-1 对于受控系统模型式8-45寻求使目标函数式8-46极小的容许控制策略，等价于辅助系统模型式8-47～式8-49，寻求使目标函数式8-50极小的广义最小方差控制策略，且这个广义最小方差控制策略由

$$x^*(t+k|t) = x_y^*(t+k|t) - \Psi y_r(t) + \Lambda u(t) = 0 \tag{8-51}$$

给出，式中，$x^*(t+k|t)$和$x_y^*(t+k|t)$ 分别由以下公式给出：

$$x^*(t+k|t) = x_y^*(t+k|t) - \Psi y_r(t) + \Lambda u(t), \tag{8-52}$$

$$Cx_y^*(t+k|t) = C\Gamma y^*(t+k|t) = G_k y(t) + F_k u(t)。 \tag{8-53}$$

式中，

$$F_k = F_k' B, \tag{8-54}$$

而向后平移算子多项式G_k和F_k'由恒等式

$$\Gamma C = AF_k' + q^{-k}G_k \tag{8-55}$$

定义，各多项式的阶次为：

$$\deg G_k = \begin{cases} n_a - 1, & 若 n_a + k - 1 \geqslant n_c + n_v, \\ n_c + n_v - k, & 若 n_a + k - 1 < n_c + n_v; \end{cases}$$

$$\deg F_k' = k - 1;$$

$$\deg F_k = n_b + k - 1。$$

且多项式F_k'为首一多项式。

$x^*(t+k|t)$表示k步最优辅助输出预测，$x_y^*(t+k|t)$ 表示使输出$x_y(t)=\Gamma y(t)$ 的预测误差的方差为最小的k步最优输出

预测。

现在考察式 8-39 给出的系统，若采用广义最小方差控制将会得到什么结果。

设系统的数学方程为

$$y(t)+a_1y(t-1)=b_0u(t-1)+\xi(t)。$$

对照定理8-1，此时，

$$k=1, A=1+a_1q^{-1}, B=b_0, C=1。$$

从而可得，$F_1'=1, F_1=BF_1'=b_0$。

由式 8-55 得：

$$G_1=q(\Gamma C-AF_1')。\tag{8-56}$$

若设，$\Gamma=1, \Psi=1, \Lambda=\lambda_0$，

则 8-46 为：

$$J_1=E\{(y(t+1)-y_r(t))^2+\lambda_0^2u^2(t)\}。$$

由式 8-56 得： $G_1=q[1-(1+a_1q^{-1})]=-a_1$。

由式8-51～式 8-53 可得：

$$G_ky(t)+F_ku(t)-y_r(t)+\lambda_0u(t)=0。$$

所以

$$u(t)=\frac{1}{b_0+\lambda_0}y_r(t)+\frac{a_1}{b_0+\lambda_0}y(t)。\tag{8-57}$$

上式与式 8-40 相比，即使b_0很小，只要适当选择λ_0，就不会发生控制信号过大的问题。这是广义最小方差控制优于最小方差控制之处。同样，可以通过适当选择 Λ，使得广义最小方差控制能用于非最小相位系统，保证闭环控制系统稳定。广义最小方差控制器是自校正控制的基础，因此它显得较为重要。

8.4 确定性等价原理和LQG问题的解

对于一个随机系统，若是在不完全状态信息的情况，不可能得到状态的"准确观测值"。因此，在 6 中所求得的状态反馈控制律 $u(t)=-L(t)x(t)$就不能应用了。人们自然会提出这样的问题：能否用关于状态$x(t)$的估计值$\hat{x}(t)$（可由卡尔曼滤波方法求得）代入上式，使得$u(t)=-L(t)\hat{x}(t)$对于随机控制也是最优的？如果这

个问题的回答是肯定的，那么一个随机控制就可以分成两个部分：一个是状态估计器，它从观测输出量产生系统状态向量的最好估计；另一个是线性反馈律，它给出由状态估计量的线性函数所表示的控制信号。这样线性控制就能像系统中没有扰动且状态向量能精确地得知时一样地使用。这就是所谓的"确定性等价原理"。

由于$\hat{x}(t)$是由动态估计而获得的，因此在随机控制问题中，反馈控制律中已包含了动态过程。显然，对于满足"确定性等价原理"的随机控制问题是比较容易解决的。遗憾的是，这个原理并不是对所有随机控制问题都成立。人们已经证明，对于LQG问题，"确定性等价原理"一定成立。此时可得如下定理：

在不完全状态信息的情形下，LQG问题的解可由下述控制策略给出：

$$u(t) = -L(t)\hat{x}(t)。\tag{8-58}$$

其中，$L(t)=[Q_2+\Gamma^T S(t+1)\Gamma]^{-1}\Gamma^T S(t+1)\Phi$。 (8-59)

$$\begin{aligned}S(t) &= \Phi^T S(t+1)\Phi + Q_1 - L^T(t)[Q_2 \\ &\quad + \Gamma^T S(t+1)\Gamma]L(t) \\ &= [\Phi - \Gamma L(t)]^T S(t+1)\Phi + Q_1 \\ &= [\Phi - \Gamma L(t)]^T S(t+1)[\Phi - \Gamma L(t)] \\ &\quad + L^T(t)Q_2 L(t) + Q_1,\end{aligned}\tag{8-60}$$

$$S(N) = Q_0。\tag{8-61}$$

而$\hat{x}(t)$由下式给出：

$$\hat{x}(t+1) = \Phi\hat{x}(t) + \Gamma u(t) + K(t)[y(t) - \theta\hat{x}(t)]。\tag{8-62}$$

其中$K(t)$为卡尔曼滤波增益矩阵。

期望损失的极小值为

$$\min Ee = m^T S(t_0)m + \mathrm{tr}S(t_0)R_0 + \sum_{t=t_0}^{N-1}\mathrm{tr}S(t+1)R_1(t)$$

$$+\sum_{t=t_0}^{N-1}\mathrm{tr}P(t)L^T(t)\Gamma^T S(t+1)\Phi。\tag{8-63}$$

其中$\mathrm{tr}S(t_0)$表示矩阵$S(t_0)$的迹。由以上公式可以看出，反馈矩阵L只依赖于系统动态性能Φ和Γ，而性能指标中的Q_0，Q_1，Q_2不依

赖于扰动。

关于上述定理的证明是较复杂的，它的基本思想是利用动态规划法来建立递推方程，然后用求解定性系统的线性二次型问题的同样方法求解递推方程，用卡尔曼滤波估计状态，最后获得式8-58的控制律。

目前对一些特殊的非线性二次型问题已经证明了“确定性等价原理”，但并无一般性结论。可是在实践中常常采用“强迫分离”的方法，人为地将一个随机控制问题分解为确定性最优控制问题和状态估计问题，这在理论上虽然不严格，但在实践中往往无更好的方法，只要能确实解决问题就行。

［例8-4］ 设系统

$$x(t+1)=x(t)+u(t)+v(t), \tag{8-64}$$

$$y(t)=x(t)+e(t)。 \tag{8-65}$$

式中$v(t)$和$e(t)$是两个均值为零和协方差分别为r_1 ($r_1 \neq 0$) 和 r ($r_2 \neq 2$)的独立高斯随机变量序列。假定初始状态是正态的即$x(t_0$ $\sim N(m_1\sigma^2)$，并设指标函数为

$$l=\sum_{k=1}^{N}[x^2(k)+qu^2(k)], \tag{8-66}$$

假设$u(t)$是$y(t-1)$，$y(t-2)$，…的函数。试求使El为极小的控制策略。

解 由式8-66，考虑到$u(N)=0$，有

$$l=x^2(N)+\sum_{k=1}^{N-1}[x^2(k)+qu^2(k)], \tag{8-67}$$

由LQG问题的条件，各参数为

$$\Phi=\Gamma=Q=1, R_0=\sigma^2,\ R_1=r_1,\ R_2=r_2,$$

$$Q_0=Q_1=1, Q_2=q。$$

由上述定理的各公式可得：

$$L(t)=\frac{S(t+1)}{q+S(t+1)}, \tag{8-68}$$

$$S(t)=1+\frac{qS(t+1)}{q+S(t+1)},\qquad(8\text{-}69)$$

$$S(N)=Q_0=1。\qquad(8\text{-}70)$$

由式8-68，式8-69可递推求得$L(t)$。

另一方面，由卡尔曼滤波公式可以求得：

$$\begin{cases}\hat{x}(t+1)=[1-K(t)]\hat{x}(t)+u(t)+K(t)y(t),\\ K(t)=\Phi P(t)\theta^T[\theta P(t)\theta^T+R_2]^{-1}\\ \qquad=\dfrac{P(t)}{P(t)+r_2},\\ P(t+1)=\Phi P(t)\Phi^T+R_1-\Phi P(t)\theta^T[\theta P(t)\theta^T\\ \qquad+R_2]^{-1}QP(t)\Phi^T\\ \qquad=\dfrac{(r_1+r_2)P(t)+r_1r_2}{P(t)+r_2},\\ P(1)=R_0=\sigma_2。\end{cases}$$

进而递推求得$\hat{x}(t)$。因此最优控制律为$u(t)=-L(t)\hat{x}(t)$。

(8-71)

利用公式可以求得，期望指标的最小值为

$$\min El=(m^2+\sigma^2)S(1)+r_1\sum_{t=1}^{N-1}S(t+1)$$

$$+\sum_{t=t_0}^{N-1}\frac{P(t)S^2(t+1)}{q+S(t+1)}。\qquad(8\text{-}72)$$

在此问题中，若$r_1=r_2=0$，这是确定性控制的情况，此时，最优控制律为

$$u(t)=-L(t)x(t)。\qquad(8\text{-}73)$$

其中$L(t)$由式8-68、式8-69计算。由式8-63极小期望指标为：

$$\min El=m^TS(t_0)m+\mathrm{tr}R_0S(t_0)$$

$$=(m^2+\sigma^2)S(1)。\qquad(8\text{-}74)$$

当$r_1\neq0$，$r_2=0$时，这是完全状态信息的情况，最优控制律同式

8-73，只是指标最小值为

$$\min El = m^T S(t_0) m + \mathrm{tr} R_0 S(t_0) + \sum_{t=t_0}^{N-1} \mathrm{tr} S(t+1) R_1$$

$$= (m^2 + \sigma^2) S(1) + r_1 \sum_{t=t_0}^{N-1} S(t+1)。 \qquad (8-75)$$

若当$N \to \infty$时，$S(N)$趋于一个常数$S(\infty) = S$，此时系统的反馈系数$L(t)$为常数，可以计算如下：

$$S(\infty) = 1 + \frac{qS(\infty)}{q + S(\infty)}。$$

解出

$$S = 0.5 + \sqrt{0.25 + q}。$$

而 $L = L(\infty)$为

$$L = \frac{S}{q + S}$$

$$= \frac{0.5 + \sqrt{0.25 + q}}{q + 0.5 + \sqrt{0.25 + q}}。$$

$r_1 = r_2 = 0$ 的情况：控制策略为

$$u(t) = -Lx(t)。$$

脉冲传递函数为

$$\frac{u(z)}{x(z)} = -L。$$

期望指标的极小值为

$$\min El = (m^2 + \sigma^2)(0.5 + \sqrt{0.25 + q})。$$

$r_1 \neq 0, r_2 = 0$的情况：控制策略及其脉冲传递函数与$r_1 = r_2 = 0$的情况相同。期望指标的极小值为

$$\min El = (m^2 + \sigma^2)(0.5 + \sqrt{0.25 + q}) + r_1 \sum_{t=1}^{\infty} S(t+1)。$$

$r_1 \neq 0, r_2 \neq 0$的情况：控制策略为

$$u(t) = -\hat{L}x(t)。 \qquad (8-76)$$

式中：

$$\hat{x}(t+1)=[1-K]\hat{x}(t)+Ky(t),$$

$$\hat{x}(z)=\frac{K}{z-1-K}y(z)。\tag{8-77}$$

由式 8-76 和式 8-77 得到脉冲传递函数

$$\frac{u(z)}{y(z)}=\frac{-LK}{z-1-K}。$$

式中

$$K=\frac{P}{P+r_2}。$$

而 $P=P(\infty)$ 由 $P(\infty)=\frac{(r_1+r_2)P(\infty)+r_2r_1}{P(\infty)+r}$

解出

$$P=\frac{r_1\pm\sqrt{r_1^2+4r_1r_2}}{2}。$$

期望指标的极小值为

$$\min El=m^2(0.5+\sqrt{0.25+q})+\sigma^2(0.5+\sqrt{0.25+q})$$

$$+r_1\sum_{t=1}^{\infty}S(t+1)+\sum_{t=1}^{\infty}\frac{P(t)S^2(t+1)}{q+S(t+1)}。$$

对上式右边各项做如下物理解释：第一项是确定性控制给出的期望指标的极小值，第二项是初始状态的随机性造成的附加项，第三和第四两项是分别由模型噪声和测量噪声造成的附加项。

对于连续时间的 LQG 问题，也有与离散 LQG 问题类似的结果。它也符合确定性等价原理。读者可参阅文献[8]。

9 自适应、学习和自组织

9.1 基本概念

一个系统，无论它是确定性的或是随机性的，当其特性为已知时，一般有可能求得最优控制策略。前面已介绍了寻找最优控制或随机控制的方法。但是，系统与环境是相互联系的，环境的变化必然要影响到系统的特性，而且这种影响事先也很难预测。因此，人们在实现控制的过程中，系统的特性(结构、参数等)事实上已经发生了不同程度的变化。在变化后的条件下，事先确定的最优控制可能已经不再具有最优性了。那么，可否设计一种能跟随环境或系统特性变化的最佳控制呢？这是一个困难的、但却是极为重要的课题。它曾吸引了几代控制论专家为之而奋斗。

事实上，上述问题与一些重要的概念有关，这就是自适应、学习和自组织。这是三个互相联系的概念。在不同的学科中，它们的涵义往往不同。同时，这三个概念也是很难给予精确定义的。

9.1.1 自适应

自适应一般是指系统能改变其自身，使得其行为在新的或者已经改变了的环境下达到最好或至少是容许的特性和功能。自适应的性质清楚地表现在活机体的体内平衡机制中，例如温血动物体温的调节随着温度的变化而变化的现象就是自适应的典型例子。在较低的温度下，动物体温的调节是通过改变体表组织和血流量，以保证身体与环境之间的最优热传导条件；另一方面，如果环境的温度高了，体温控制是借助于出汗和呼吸的过程，以保证充分释放过剩的热量而实现的。温血动物就用这种方式使自己适应其环境条件的变化，以保证实现稳态。但是人造系统远远达不到如

此高超的适应水平。

生理学家在说明自适应概念时，习惯于用自适应度的概念来描述。自适应度理论是基于黑暗自适应、疼痛自适应和音响自适应等经典生理学实验现象的理论。赫尔森 (Helson) 已将这个理论推广到所有行为领域，并总结出一些规律[6]。根据这一理论，自适应度可以作为行为的阈值，这个阈值是作用于有机体的输入量的函数。

斯克兰斯基(Sklansky)认为："一个细胞、一个器官、一个有机体，或者一种物种，如果在变化的环境中，它的行为在某种定义上是'成功的'，那么它就是自适应的。"[61]一个具有自适应功能的系统称为自适应系统。区别自适应系统和非自适应系统的性能标志是稳定性和可靠性。斯克兰斯基和阿什比(Ashby)都从生理学的角度，分析了自适应系统的稳定性和可靠性。

查德(Zadeh)通过对自适应系统外部表现的描述，把自适应系统定义为："一个自适应系统对它的环境变化是不敏感的。"[62]斯克兰斯基认为："查德所提出的自适应性可以看成是稳定性和可靠性的合并，尽管查德本人并没有把自适应性和可靠性明显地联系起来。"

凡此种种，关于自适应的定义至今没有统一。但是，"自适应控制"这个词在40～50年代就已经开始使用了。它是指具有自适应功能的控制系统。60年代之后，随着控制论的发展，自适应控制系统的研究日益显得重要。

9.1.2 学习

与自适应概念密切相关的是学习这个概念要对学习下一个严格的定义，同样是困难的。维纳在研究动物的学习和生殖功能时，将学习分为二种，一种是从一代到下一代的变化形式，称为种族学习或系统发育学习，而把个体中所发生的行为变化或行为学习，称为个体发育学习。维纳提出："一个动物进行学习，那它就是一个能够被它过去的环境转变成另一个不同的动物，因而它在自己个

体生活的时间内对周围环境的影响是可调节的。一个动物进行繁殖，就是它能够产生出另一些虽然不是和它完全相同，至少是近似相同的动物，所谓近似相同，就是在时间的进程中不是不能发生任何改变。如果这种改变本身是能遗传的，我们就有了供自然选择发生作用的原始材料。"[1]他进一步认为，人类的大部分系统发育学习，都已转用于建立良好的个体发育学习的可能性，而在鸟类和昆虫中，个体发育学习是受限制的，这些动物的多数行为是来源于系统发育学习的。

申农 (Shannon)也提出过关于学习的定义："假定一个有机体或一台机器处于某类环境中，或者同该类环境有联系，而且还假定存在一个对该环境是'成功'的量度或'自适应'量度。进一步假定，这种量度在时间上是比较局部的量度，即人们能在比该有机体生命期更短的时间内，测定这个成功的量度。如果对于所考虑的这类环境，这种局部的成功量度有随时间而改善的趋向，那么我们就可以说，相对于所选择的成功量度，该有机体或机器正为适应这类环境而学习着"。

申农的定义只考虑了能在比有机体生命期更短的时间里的学习过程，因此，他的定义只限于所有可能的个体发育学习的一个子集。维纳的定义既考虑了个体发育学习，也考虑了系统发育学习，是一个涵义更为宽广的定义。

在控制论中，"学习"一词通常被简单理解为，通过经验取得某种技能，而将不需外界帮助，具有学习功能的系统称为自学习系统。根据美国自控专家萨里迪斯(GeargdN.Saridis) 的建议[9]，一个系统，如果能对一个过程或其环境的未知特征所固有的信息进行学习，并将得到的经验用于进一步的估计、分类、决策或控制，从而使系统的品质得到改善，那么就称此系统为学习系统。一个学习系统，若其学得的信息被用来控制一个具有未知特征的过程，则称之为学习控制系统。

一个自学习系统，可以不必知道有关控制的确切算法，而只要给出达到这一算法的途径，系统就能根据自己运转过程中的"体

会"或"经验",及时地修改算法,使之达到最优或次最优的程度。

9.1.3 自组织

在控制论中,与自适应、学习有关的另一个重要概念是自组织。在物理系统和生物系统中,都有自组织现象发生。它也是普利高津(I. Prigogine)耗散结构理论研究的核心。[26,27]

任何系统的形成都是一个组织过程。组织过程是事物或一组变量从无联系的状态进化到某些特定状态的过程。一个系统,在开始时,它的各部分是分散的,系统的每一部分是独立运转的,在运转的过程中,系统的各部分之间形成联系,以致从各部分分散变到各部分联系,从而形成一个有组织的统一的整体。这种能具有自行组织功能的系统,称为自组织系统。

长期以来,物理学家认为:自发过程总是使体系趋于平衡。在孤立体系中,平衡态是熵取极大值的态,根据热力学第二定律,自发过程总是沿熵增大的方向发展,回到熵取极大值的平衡态。在热力学中,熵是衡量系统混乱程度的一个量,熵的极大状态也将是分子排列最无序的状态。因此,根据上述结论,在孤立体系中,自发过程将表现为趋于平衡和趋于无序。为了给系统的秩序化程度加以度量,我们把热动力平衡系统中的最大熵记为 H_m,把取系统状态偏离热动力平衡状态的程度,作为系统的有序度 R的量度。为此申农引进了"剩余度"概念:

$$R = 1 - \frac{H}{H_m}。\qquad (9\text{-}1)$$

式中,R表示剩余度,H为系统的熵。H_m为系统的最大熵。由此可知,任何系统的秩序化程度将由 R 的值表示,R 在 0 和 1 之间变化,对完全无序的系统,R 取 0,而对理想的有序系统取值,R为1。

对于自组织系统,它的有序度将随着时间的推移而增长。在数学上可表示为

$$\frac{dR}{dt} > 0。\qquad (9\text{-}2)$$

由式 9-1 可得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{H}{H_m}\right)>0。\tag{9-3}$$

若 H 和 H_m 都是时间的函数，那么由式 9-3 可得：

$$H\left(\frac{\mathrm{d}H_m}{\mathrm{d}t}\right)>H_m\left(\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\right)。\tag{9-4}$$

上式可以作为自组织系统的一个判据。

式 9-4 表明，如果一个系统的熵和最大熵的变化率之积，大于系统最大熵和系统熵的变化率之积，就认为这个系统是自组织系统。在这种情况中，系统的元素数量在增长，而系统的组织比加入新元素所要求的要快些。

若系统的最大熵为常量，则

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}<0。\quad (H_{max}=常量)\tag{9-5}$$

这意味着，在最大熵为常量时，若要使系统成为自组织系统，系统熵的变化率就必须是负的。此时，系统应从外界引入负熵。

若系统的熵 H 为常量，且系统的元素数量在增长，该系统为自组织系统的判据为：

$$\frac{\mathrm{d}H_m}{\mathrm{d}t}>0。\quad (H=常量)\tag{9-6}$$

此时，必须将附加元素加入系统，因为 H_m 的大小与系统的元素数量有关。

由上面的分析可知，在发生组织现象之前，系统必定是无组织的，系统的起始剩余度接近于最大值，但由于系统的自组织功能使系统形成组织化。有时，我们把起始状态是未知变量、或是随机变量、或是无约束量的自适应或学习系统看成是自组织系统。

在热力学的观点看来，自组织现象不会从孤立系统中产生，自组织系统必然是开放系统。根据耗散结构理论[26]，一个远离平衡的开放系统（力学的、物理的、化学的、生物的、乃至社会的、经济的系统），通过不断地与外界交换物质和能量，在外界条件的变化达到一定阈值时，可能从原有的混沌无序的状态，转变为一种在

时间上、空间上或功能上有序的状态，这种在远离平衡情况下所形成的新的有序结构，称为耗散结构。形成耗散结构的现象也可称为非平衡非线性现象、合作现象或自组织现象。

自组织现象是普遍存在的。在流体力学中，存在着一种对流有序现象。当从下面加热某一流体薄层时，起初在流体中只有热传导存在，当流体中的温度梯度超过某一临界值时，原来静止的流体中会突然出现许多有规则的六角形对流格子，即所谓的贝纳德(Benard)花纹。在60年代出现的激光，是一种时间有序现象，当外界向激光器中输入能量的功率低于某个临界值时，激光器中的每个原子独立地无规则地发射光子，激光器就像一个普通灯泡一样，整个光场系统处于无序状态，但当输入功率超过某个临界值，激光器会发出单色的相干受激发射光，不同原子发出的光的频率和位相都变得十分有序。另外，所有活机体都是有组织系统，这些系统的有序度大于零。在细胞的新陈代谢、胚胎的发育、对环境的适应性、学习、思考和再生的能力等等复杂的过程中，都存在极为高明的自组织控制过程。以人脑为例，现已证明，在人出生一年后，脑细胞数目不再增加。人的一生所接受的一切信息不可能预先存贮在脑内，也不可能预知。脑实际上是通过接受输入信息，使神经之间的联结方式发生可塑性变化的一种自组织系统。

目前，一般还不能完全预知其环境和控制对象，也不能确切知道其控制算法与条件，但能够通过自身的运转，逐步积累"经验"，改进控制，以逐步达到最优或次优的系统，称为自组织系统。美国IEEE控制系统名词委员会认为："一个控制过程，能通过控制过程的发展过程中，从其输入和输出观察到的信息，用于减少对系统进行有效控制的先验不确定性，那么就是一个自组织控制过程。"对于控制论研究工作者来说，就是要研究和构造一些人工的自组织系统。这也是目前人工智能研究的一种途径。

9.2 自适应控制系统

9.2.1 自适应机的一般原理

首先，介绍斯克兰斯基用MEC组态描述的自适应机原理[61]。如图 9-1 所示。

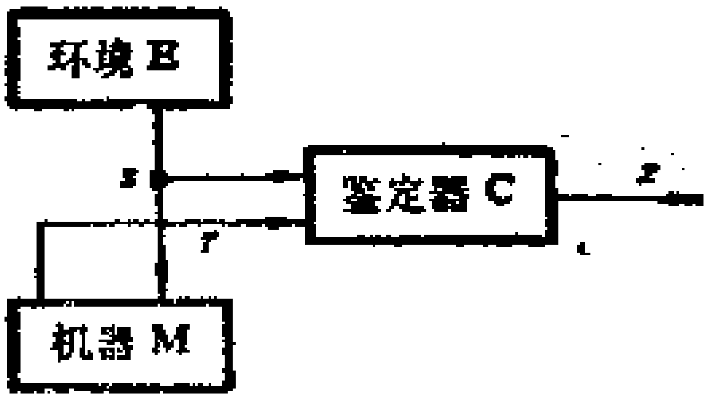


图 9-1 MEC组态

图中机器输入为“刺激”s；机器的输出为“响应”r；机器的成功量度由鉴定器的输出、或者由所谓的“有效性”量度z来给定。图 9-1 所示组态叫做 MEC (机器、环境、鉴定器) 组态。机器的自适应性由稳定性表现，或者由可靠性表现，或者由稳定性和可靠性共同体现。

对于 MEC 组态，有：

(1) 当E变化时，若 z 保持在规定的范围内，则该系统是稳定的。

(2) 当 M 变化时，若 z 保持在规定的范围的，则该系统是可靠的。

在这个描述中，关于自适应系统的性能要求不是时间的函数。

如果要用数学方法来表达自适应系统，查德给出了一个基本的描述。他用所谓改进的 MEC 组态来描写自适应系统。如图 9-2所示。

在这种描述中，用输入函数集$S_r \triangleq \{u\}$取代了图 9-1 中的环境 E。在S_r中的输入函数u可以是时间的函数。此处输入u所包含的分量既有输入或刺激变量，也有环境因素，还有机器故障部分。r 是一个参量，它对应于某一个给定的判别准则 $P(r)$，r属于某一个

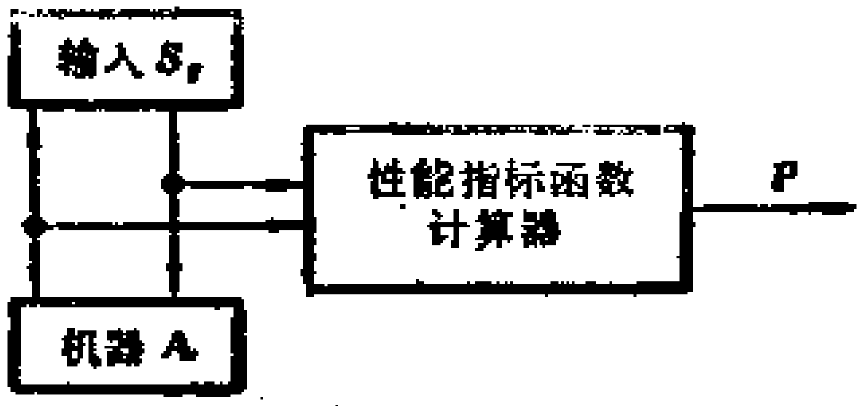


图 9-2 改进的MEC组态

集合Γ，S_r中的量可以是随机的或非随机的，它被称为源。当机器A的输入为S_r时，性能函数为$P(r)$，它也是一个输出映照。若$P(r)\in W$（W表示容许性能函数集），则可认为系统满足了容许度判据。

因此，一个自适应系统可以描述为：系统A若相对于$\{S_r\}$和W运转得相当满意，则称A对$\{S_r\}$和W是自适应的。即，对任一$r\in\Gamma$，当$\{S_r\}$作用于系统A时，都有$P(r)\in W$。也可以说，如果系统A把Γ映照到W内，则系统A对Γ和W是自适应的。

以上是关于自适应系统的比较抽象的一般描述。要满足上述要求，自适应系统必须包含两个基本功能：一种是要能自动地测量或分析系统所处的环境和对象的特性，它与系统辨识密切相关；另一种是能根据从环境和对象所得的信息，作出决策，改变控制规律，以保持系统的稳定和实现对某性能指标的最优控制。

目前，关于自适应控制系统的研究已较深入，出现了许多种类的自适应系统，以下仅介绍较为重要的几种。

9.2.2 参考模型自适应控制系统

这种控制系统由以下几个部分组成：参考模型、被控对象、常规反馈控制器和自适应控制律，系统的结构框图如图 9-3 所示。

参考模型的输出响应$y_m(t)$直接表示系统希望的动态响应。参考模型是人们对系统各种性能要求的表达，它比用一个数学式子来表示性能指标有时更为方便。

当参考输入$r(t)$同时作用于系统和模型时，分别产生了输出$y_m(t)$和$y(t)$，但由于开始时被控过程的参数不确定，控制器的初始参数不可能整定得很好，所以必然产生偏差信号$e(t)$，$e(t)$反馈

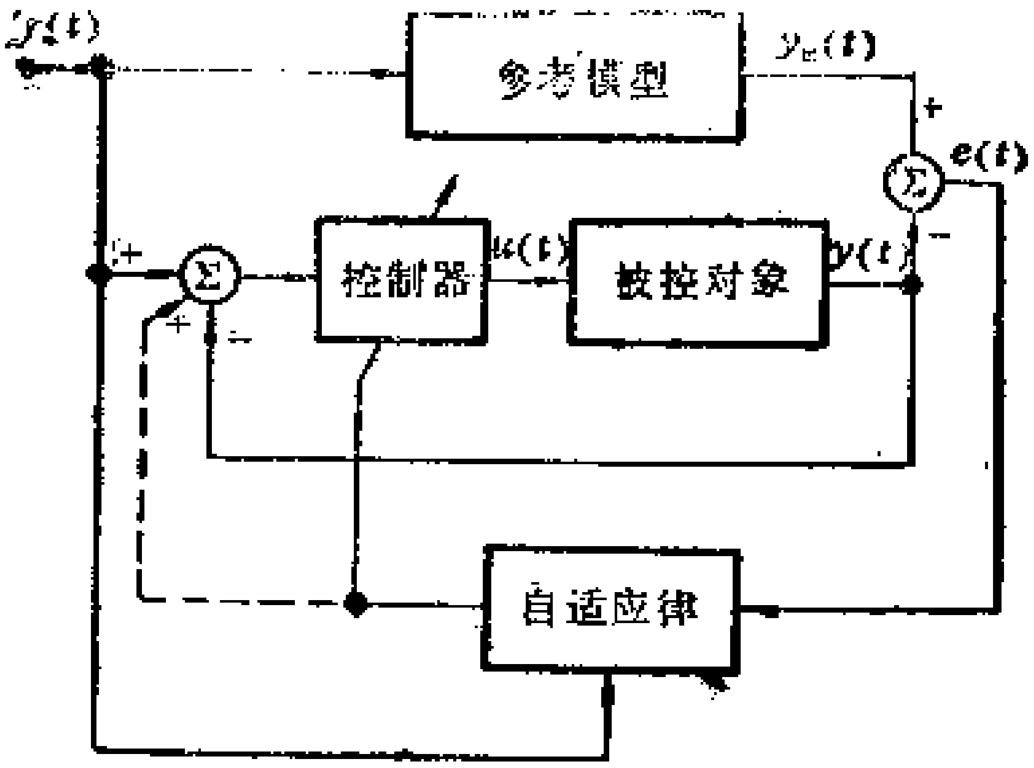


图 9-3 参考模型自适应控制系统

给自适应律，产生了适当的调整作用，从而改变了控制器的参数，这种改变的形式，可以采用直接（图中实线所示）或间接（图中虚线所示）的方式。这种调整作用将导致 $y(t)$ 的变化，使之更接近于 $y_m(t)$，直到 $y(t)\approx y_m(t)$ 为止。

显然，设计这种控制器的关键在于如何综合自适应控制律，目前主要有三种方法：

第一种方法是参数最优化方法，即利用最优化技术搜索到一组控制器的参数，使得某个性能指标（例如 $J=\int_0^t e^2(\tau)\,d\tau$）达到最小。优化的方法常采用梯度法。这种设计方法的主要缺点是系统可能不稳定。

第二种方法是基于李雅普诺夫稳定性理论的方法，它的基本思想是保证闭环系统是稳定的，使广义误差 $e(t)$ 趋于零。用这种方法所得到的自适应控制系统一定是稳定的，但对一个实际系统而言，仅仅稳定是不够的，还要考虑偏差 $e(t)$ 趋于零的速度。这种方法对这一点不能得到充分的保证，另外，李雅普诺夫函数的选取也是一个困难的问题。

第三种是利用超稳定性来设计自适应控制律的方法。李雅普诺夫的稳定性是在不考虑外界输入情况下，系统本身的稳定性，当

存在外界输入情况下的稳定性问题，就是波波夫 (B. M. Попов) 的超稳定性。利用超稳定性来设计自适应控制律的方法，需要用到传递函数或矩阵的正实性。此处就不再作深入介绍了。

9.2.3 自校正调节器

自校正调节器由三个基本部分组成。如图 9-4 所示。图中参数估计器利用在线最小二乘法对估计模型的参数进行估计，并将所求结果送到参数计算部分，再将求出的参数送入控制器。控制器根据修正后的参数，组成控制算法，再根据测量所得的输出量

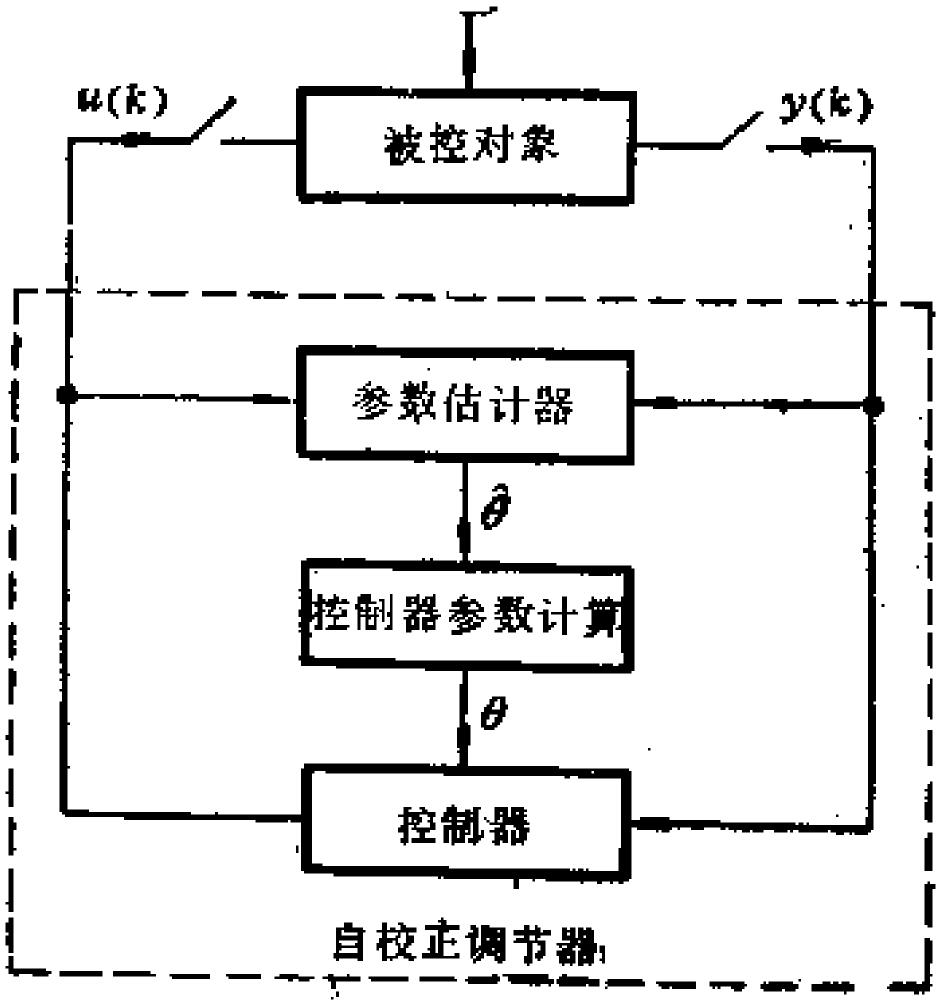


图 9-4 自校正调节器

$y(k)$算出下一步应有的控制动作。随着生产过程的运行，自校正调节器将不断地进行采样、估计、修正和控制，直到控制的性能指标最优。

在上述控制器中，通常采用最小方差控制算法。因此，这种调节器是以最小二乘辨识和最小方差控制为基础的自校正调节器。如果参数辨识的算法和控制算法的选取不同，原则上可以构成各种形式的自校正调节器。

在自校正调节器中，参数估计器是用来估计一个相应的估计

模型的参数，这个估计模型可能是受控系统本身的数学模型，这时所估计的参数就是受控系统本身的参数，在这种情况下所构成的自适应算法称为显式算法。但从控制策略来看，所估计的参数并不与它直接相关，故也称为间接算法。如果这个估计模型是与控制策略直接关联的数学模型，这时所估计的参数就是控制策略本身的参数。因此，从受控系统的角度看，这种算法称为隐式算法，但从控制策略看，又可称为直接算法。由于自校正调节器的最终目的是为了得到控制策略。所以，隐式算法比显式算法更为简便和直接。

在自校正调节器中所用到的最小二乘法和最小方差控制算法，在前面已作了介绍，此处不再赘述。以下给出一类离散时间随机系统的自校正调节算法。

设由式 8-23 所描述的随机系统。当此系统的模型参数已知时，它的最小方差控制律已由式 8-34 给出。因此，可以设想，自校正控制律的形式也应具有式 8-34 的形式。根据隐式算法的原则，估计模型考虑为与控制律的参数直接有关，此估计模型的输入与输出应为系统的实际输入和输出。为此，采用如下估计模型。

$$y(t+k)=(g_0+g_1q^{-1}+\cdots+g_{n_g}q^{-n_g})y(t)+(f_0+f_1q^{-1}+\cdots+f_{n_f}q^{-n_f})u(t)+\varepsilon(t+k)。\quad(9\text{-}7)$$

其中，

$$n_g=n_a-1,n_f=n_b+k-1。$$

式 9-7 可简写为：

$$y(t+k)=G(q^{-1})y(t)+F(q^{-1})u(t)+\varepsilon(t+k)。\quad(9\text{-}8)$$

这样，使性能指标式 8-25 最小的控制律，可由式 9-8 直接推出为

$$u(t)=-\frac{G}{F}y(t)。\quad(9\text{-}9)$$

这与式 8-34 的形式一致，因此采用模型式 9-8 是合理的。

根据系统可辨识性的研究可知，为了保证式 9-8 模型中参数的可辨识性，应设法使 F 的首项系数已知。为此，设式 8-24 中

的 b_0 已知。

在式 9-7 中，令

$$\theta = [g_0, g_1, \cdots, g_{n_g}, f_1, \cdots, f_{n_f}]^T, \tag{9-10}$$

$$\phi^T(t) = [y(t), \cdots, y(t-n_g), u(t-1), \cdots, u(t-n_f)]。 \tag{9-11}$$

则可得：

$$y(t+k) = b_0 u(t) + \phi^T(t)\theta + \varepsilon(t+k)$$

或

$$y(t) - b_0 u(t-k) = \phi^T(t-k)\theta + \varepsilon(t)。 \tag{9-12}$$

此时，式 9-9 变为

$$u(t) = -\frac{1}{b_0}\phi^T(t)\theta。 \tag{9-13}$$

利用递推最小二乘法，就可以对式 9-12 中的未知参数向量θ进行估计，设其估计值为$\hat{\theta}$，则估计公式如下：

$$\left.\begin{aligned}
\hat{\theta}(t) &= \hat{\theta}(t-1) + K(t)[y(t) - b_0 u(t-k) \\
&\quad - \phi^T(t-k)\hat{\theta}(t-1)], \\
K(t) &= P(t-1)\phi(t-k)[1 + \phi^T(t-k)P(t-1)\phi(t \\
&\quad - k)]^{-1}, \\
P(t) &= [1 - k(t)\phi^T(t-k)]P(t-1), \\
\hat{\theta}(t) &= [\hat{g}_0, \hat{g}_1, \cdots, \hat{g}_{n_g}, \hat{f}_1, \cdots, \hat{f}_{n_f}]^T。
\end{aligned}\right\} \tag{9-14}$$

若将 $\hat{\theta}$ 代入式 9-13 得控制律为：

$$u(t) = -\frac{1}{b_0}\phi^T(t)\hat{\theta} \tag{9-15}$$

或

$$u(t) = -\frac{\hat{G}}{\hat{F}}y(t) \tag{9-16}$$

式中，

$$\hat{G} = \hat{g}_0 + \hat{g}_1 q^{-1} + \cdots + \hat{g}_{n_g} q^{-n_g},$$
$$\hat{F} = \hat{f}_0 + \hat{f}_1 q^{-1} + \cdots + \hat{f}_{n_f} q^{-n_f}。$$

综上所述，自校正调节算法有以下步骤：

(1) 测量输出 $y(t)$ 的数据；

(2) 组成观测数据向量$\phi(t)$和$\phi(t-k)$；

(3) 用递推最小二乘法式 9-14 估计参数向量$\hat{\theta}$；

(4) 由式 9-13 计算控制律；

(5) 将采样次数加1,即将t变为$t+1$，重复上述步骤。

由于参数估计存在误差，即$\hat{\theta}$并不精确等于θ。上述算法将不是最优的。可以证明,如果参数估计的收敛值,使多项式$\hat{F}$和$\hat{G}$没有公因子,则自校正调节器控制律式 9-15 将收敛于最小方差控制律式 8-34。

仿真研究和工业应用表明,在大多数情况下,上述收敛性是成立的，这就使得自校正调节器成为一个具有实际意义的自适应控制器。但是,由于自校正调节器是以最小方差控制器为基础的。因此,仍然存在最小方差控制器的一些主要缺点,而且由于自校正调节器是用估计参数代替真参数，上述缺点可能更加严重。为此，人们又研究了一些新的自校正控制算法，比较成功的是基于广义最小方差控制律的自校正控制器,它克服了自校正调节器的缺点,又保持了原算法的简易性，是一种较好的自校正策略。关于这方面的内容,读者可参阅有关书籍。

9.3 学习系统

9.2中所介绍的自适应控制系统,能在未知的周围环境下进行有条件的决策,使得系统能适应变化了的环境,保证达到一定的目标要求。这是一种比较高级的控制系统,它在各个领域中已获得了广泛的应用。但是,上述自适应控制系统并不是控制系统发展的顶点，人们已在研究更为复杂的具有"智能"的控制系统。这类系统具有在不确定的、变化的环境中进行复杂决策的能力。在以人作为控制部件的系统、人-机交互系统、人工智能、机器人技术、工业自动化、危险环境考察、自学习假肢以及仿生系统、社会经济系统等领域,都已开展了这方面的研究工作。

学习是人的智能的一种表现。如果能在机器的控制系统中,模仿人的智能特征,研究和设计出具有学习功能的控制系统,无疑

是具有重要意义的。

9.3.1 学习的方式

学习的过程通常可以有二种不同的方式。一种方式是有教师指导的方式，另一种是无教师指导的方式。教师的指导可以有多种方法进行。例如，教师可以向学生传授解题的算法，制定出一些"死板的"规则，学生只要根据这些规则就可以获得问题的解答。人们为计算机求解问题编制程序，可以说是人教机器进行"死记硬背"的学习。这是一种很低级的学习方法。另外，教师也可以通过"举例"或其他"启发式"的方法来教学生学习。在人工智能的研究中，人们总结了人在解题时的一些经验、技巧或策略，编制成"启发式程序"。计算机根据这些启发式程序选择可能是最优的求解途径。这种方法可以说是人用"举例"或"启发式"方法教机器学习。当然，这种启发的方法并不能保证学生或机器一定能找到问题的最佳答案。关于启发式程序方法，将在13中介绍。

在动物界，用例子来进行学习的方法，对于许多物种的生存是非常重要的。动物要教它们的后代获得食物和躲避危险，并不是向后代传授解决这些问题的"死板方法"，而总是通过举例或示范来进行"指导"。人在解决日常生活的各种问题时，大部分习惯和方法也是用观察和类比的方法获得的。

在9.2中所介绍的参考模型自适应控制系统，也可以看成是一种比较低级的有指导的学习控制系统。在这种情况下，"指导"作用是通过"参考模型"来实现的。

目前，机器的学习过程还远未达到人的学习过程所具有的灵活性。人的大脑是在为生存而斗争的环境之中进化而成的，而且人还能学习编制计算机程序、下棋、思索自身大脑的工作机制，而大多数的机器学习是有"教师"指导的学习。

在控制系统中，所谓学习控制是指系统可以根据过去的经验积累，不需要对系统进行连续地识别，就可以自动地采取自适应方式使系统运行在最佳状态。这是一种更高级的自适应控制系统。

9.3.2 图形识别

图形识别是用举例方式教机器学习的一个成功的尝试[5]。这种识别机是一台能学会识别视觉图像的自动机。这些图像包括几何图形、字母、数字和语言文字符号等。图形识别机问题可以描述如下：

存在一个集合X，它包含n个不同的对象，n可以是很大的数。X可以表示为：

$$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}。$$

X属于m个已知类$X_1, X_2, \cdots, X_m$，m是一个较小的数。如果自动机A总能够（或几乎能够）把各个元素x与已知类X_i联系起来，我们就认为自动机A解决了识别问题。

例如，集合X可以是含有不同的几何形状的集合，在这些几何形状中，必须区分出属于三角形、矩形、圆形等类的图形。

上述识别问题是模式识别领域所研究的问题。所谓模式就是客体的集合，或客体的类别。其中每个客体就是模式的一个实例，称为模式样本。确定一客体是否属于某个模式的法则称为模式规则。

例如，在上述问题中若对象x为数字，那么集合$X_1 = \{3,5,7,9,11\}$就是一个模式。在这个模式中，模式样本是3,5,7,9和11五个数字。模式规则是：假如一个客体是一个单数，且大于或等于3，小于或等于11，则这一客体就属于模式X_1。

人的才能的获得，依靠的是从经验中学习的能力。儿童识字母表主要是通过反复让他看这些字母，并且告诉他如何区分各个字母的方法。这个过程与机器识别视觉图形的过程是类似的。因此，通常把模式识别和学习放在一起研究。

图形识别机的接收装置称为接收器场，它由一些光电管组成一个阵列，类似于人的视网膜。被识别的图像就投射在接收器场上。如果接收器场由r个元件组成，每个元件可以处于受激或未受激两种状态之一，那么在输入处的可能形状总数将是$n = 2^r$。n可

能是一个很大的值，使得计算机的存储器不能存放所有可能形状的信息。

例如，设一个接收器场的阵列在横向上有 32 个感光元件，纵向上有 48 个感光元件，共形成 1536 个感光元件。对这样一个比电视机图像要粗得多的网络，所形成的模式数就已高达 2^{1536}，或近似于10^{460}。要对这么大量可能的模式作穷尽分类是行不通的。即使有这么大的计算机存贮量，学习过程也无法实现。

实际的识别系统是首先将图像加以处理，找出特征，从而得到一个信息量已大为减少的新的图像。这些特征可能位于图像区域之中，也可能是一些概括性的特征。例如，可以用"图像中是否包含有横向粗线条"为特征。

图形识别机的输出对应于m个已知的分类。为了教这种机器识别图形，首先要把属于这个模式样本的一些客体和不属于该模式样本的一些客体提供给计算机，同时告诉计算机哪一些客体是该模式的样本，哪一些客体不是该模式的样本。为此，需要向机器提供$l \leqslant n$个例子来说明如何把对象x分入X_i类，从而使识别机能"学会"区分真实的对象。

教自动机A识别图像的大致过程如下：通过对自动机的接收器场的作用，把从集合X中随机选出来用于学习的 l 个对象提交给自动机A。一台基准自动机A_r起作教师的作用，人也可以起基准机的作用。A_r将告诉自动机A 各个对象属于学习序列$x_{j1}, x_{j2}\cdots, x_{jl}$的哪一类。

在教学过程中，教学装置 TE 把基准自动机 A_r的反应 y_r与学习自动机A的反应 y 进行比较，并改变自动机A 的状态 z，使得A的反应尽可能经常地与A_r的反应一致。然后，随机地选取一个试验序列$x_{k1}, x_{k2}, \cdots, x_{ks}$输入给自动机。如果自动识别机在第二个试验序列上所犯错误的次数不超过容许数目，那么就认为学习结束。否则再重复上述过程，直至达到所要求的识别可靠性为止，或直到发现这台自动机将达不到所要求的可靠性为止。

上述学习过程的有效性与输入模式的表示、识别自动机的状

态数及学习装置的算法有关。这涉及比较专门的知识，此处从略。图形识别机的示意图如图9-5所示。[5]

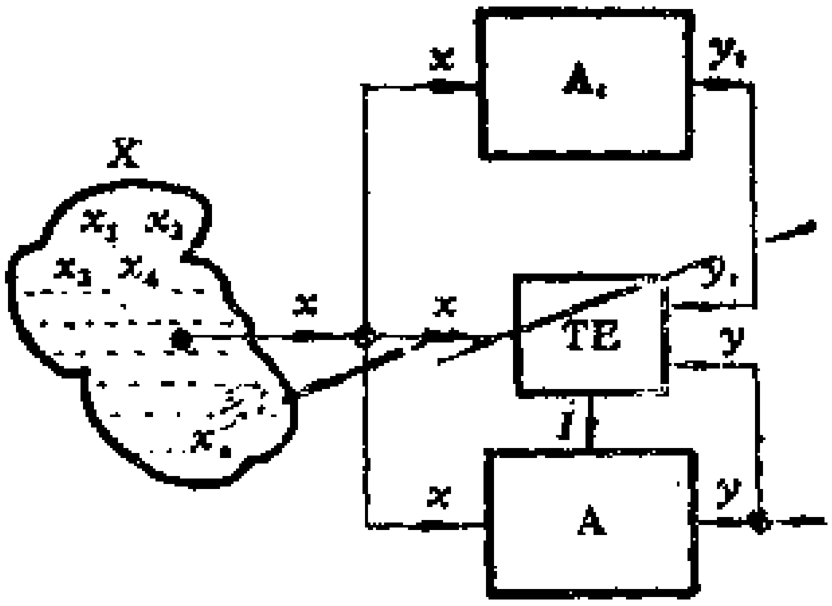


图 9-5 图形识别机示意图

9.3.3 塞尔弗里奇的"群妖堂"

塞尔弗里奇（O. G. Selfridge）为模式识别的学习系统提供了一个更为一般的模型[43]。这个系统模型被称为"群妖堂"(Pandemonium)。"群妖堂"由所谓的"妖"组成，它们是一些相对独立的实体，犹如热力学中的麦克斯韦妖(Maxwell's Demon)。"群妖堂"的示意图见图9-6。

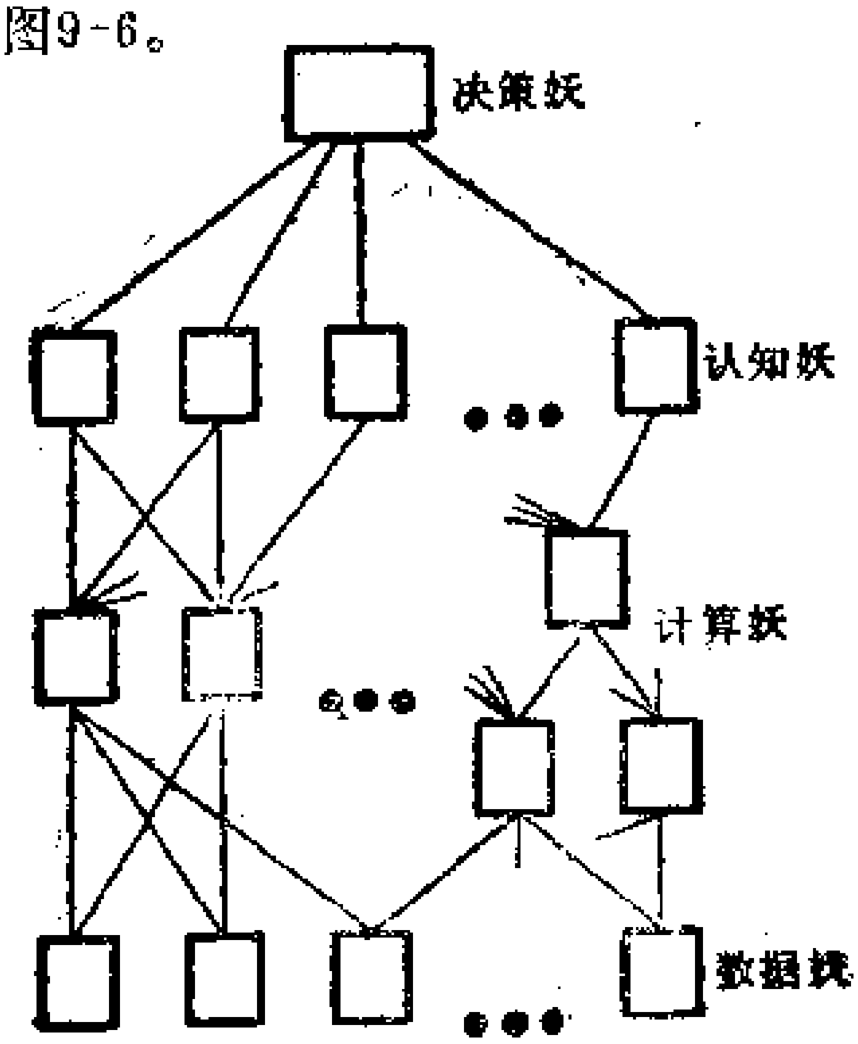


图 9-6 塞尔弗里奇的"群妖堂"

群妖堂的最下层是数据妖或图像妖，它们可以是一些感光元件。最上层是决策妖，识别出的模式类别由决策妖确定。决策妖底下是认知妖，认知妖与所要识别的模式类别一一对应。

认知妖可以计算输入模式与由认知妖所表示的模式类别之间的一致程度。一致程度越高，送入决策妖的信号越强，决策妖将选择最强的一个信号作为输出。

认知妖可以直接从数据妖接受输入，但对于不同的认知妖需要有某些类似之处，为此在认知妖和数据妖之间加入一中间层，称为计算妖，它们与其他系统的特征提取器相对应。

群妖堂是一种学习装置，每一个认知妖都将不断地作调整，并结合计算妖的各个输出产生一个输出送给决策妖。认识妖将根据决策是否正确有效的反馈信息作出适当的调整。塞尔弗里奇假定，每一个认知妖均计算来自于计算妖的信号的加权和，设D_i表示第 i 个认知妖的输出，则D_i可如下计算：

$$D_i = \sum_j w_{ij} d_j。$$

其中，$\sum$表示对各计算妖取和，d_j为第 j 个计算妖的输出，w_{ij}是加权值。认识妖是通过调整w_{ij}来实现反馈调整的。如果反馈是一个表示目标完成程度的标量，那么这一调整将使用塞尔弗里奇论文中的爬山法。一旦权调整到最佳值附近，就可以计算每一个计算妖对整个系统的价值。它的价值决定于它的输出得到了多大的利用。第 j 个计算妖的价值可用下式计算：

$$w_j = \sum_i |w_{ij}|。$$

根据计算妖的价值来自动清除低价值的计算妖，并用新的计算妖来取代。塞尔弗里奇提出了两种产生新计算妖的方法。称为结合法 (conjugation) 和突变分裂法(mutated fission)。这二种方法的基本思想是：所产生的计算妖如果与已被证明是高价值的现存计算妖有着某些共同之处的话，那么多半是有用的。因此，可以从两个高价的计算妖结合而成新的计算妖，或是从高价妖出发，分裂出新的相似的计算妖，这种分裂必须不会轻易地破坏整体的

性质。

塞尔弗里奇将上述"群妖堂"原理应用在手发莫尔斯电码的自动接收上。他发现，点、划和空白常常根本不是以标准的方式发出的。莫尔斯符号要得到正确的译释，必须考虑它在电报原文中占有的传送长度。可以使用"群妖堂"原理，让数据妖的输入表示所要译释的符号。

"群妖堂"的原理也被用于字符识别，使得字符识别的错误率很小。但是对于这种学习系统的局限性，塞尔弗里奇有着清醒的认识："我们根本还没有能触及到最主要的学习过程：现在尚没有一个能自己产生出测试特征的程序。所有这些程序，其有效性总是要受到编制者的创新性或狭隘性的限制。我们对怎样才能克服这一限制只能作出猜测。只要是这样，'人工智能'就只能是人的智力的产物"。

9.3.4　再励学习系统

心理学家们通过将"学习"与人和动物的行为相联系，而把"学习"看成是系统性能按某一特定目标而作的各种有规律的变动。在学习理论中最重要的原理之一就是再励规律。它是对于作为系统的主体在行为上的变动效果是否达到目的而确定的奖惩规律。这种奖或惩是通过数学学习模型中一组响应概率的变化来加以实现的。最典型的例子是"迷宫老鼠模型"：

一只饥饿的老鼠进入了第 l 个T 型迷宫 ($l=1,2,\cdots,s$)，在迷宫的叉路上它需要决断是向右还是向左转(对应于 $i=1$或 2)以找寻食物，食物就代表对它的奖励。我们用 E_1, $E_2\cdots$, E_s代表 s个T形迷宫，如图9-7 所示。

老鼠可以经 n 回逐次的试探而学会转到正确的方向。对每个 E，老鼠将是否找到食物的经验存储在它的短程记忆中。而当它由一个T形迷宫移到另一个时，它需要对每个局势重复其学习过程，并将经验存储在它的长程记忆中。老鼠总是力图在相似的环境下，得到最大的奖励。显然，这也是一种行为学习系统。

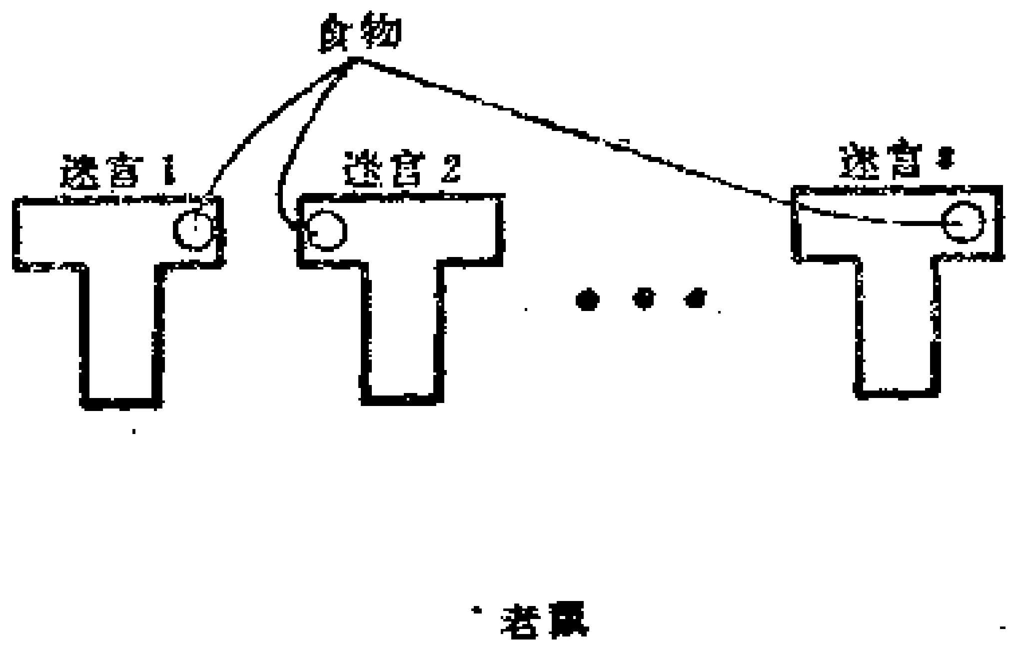


图 9-7 s个T形迷宫的试验

若用$f_i^l(n)$表示在n次试探后，在第l个T形迷宫中，老鼠作出向第i个方向响应的概率。Bush、Estes和Mosteller[44] 给出了利用上述概率建立再励学习模型的方法。在这种模型中，控制器的任务在于在线地学习最佳的控制策略，也就是说在缺乏关于对象和环境扰动的完全信息时，通过对对象施加控制作用、而使原始的品质指标极小化。

事实上，"迷宫老鼠"问题是可以用第3章中所介绍的概率自动机来描写的。概率自动机可以看作是能进行行为学习的系统模型。这种自动机的行为特征是用一个转移概率的矩阵来描写的。如果外界(环境或教师)对概率自动机施行"赏"或"罚"，使得对某一种转移，自动机每次都受到"处罚"，那么转移到这一状态的概率就会下降，而其他状态的转移概率就会上升。用这种方法就有可能教会概率自动机有目的地行动。

再励学习系统的数学模型是研究学习系统的典型模型。除此之外，还采用了多种数学方案来研究学习系统，如采用模式分类器的可训练系统；贝叶斯估计；随机逼近；随机自动机模型；模糊自动机模型和语言学方法等等。[9]

9.4 自组织系统

自组织及自组织系统的概念已在前面作了介绍，本节将对自

组织系统作进一步的分析。

在生物界，自组织系统是普遍存在的，生命现象是自组织性的典型体现。人这个系统就是一个真正的自组织系统，人可以调节自身的组织和活动，以维持某种功能和达到某种目标。例如，人可以通过出汗来降低体温，又可以通过加速提供热量来弥补散失的热量，从而使体温保持恒定。对于任何活的肌体，他们从胚胎的发育、对环境的适应性、学习、思考和再生的能力都与活机体的自组织特性分不开。显然，在这一类自组织系统中，一定存在着非常美妙和高超的控制系统，它们调节和指挥整个系统的运转，而且这些控制系统还会遗传给他们的后代。人们试图揭示活机体中自组织控制系统的奥秘，并将其造福于人类。

在人造的控制论系统中，人们试图模仿活机体的某些功能，形成具有自组织特性的系统。前面介绍的行为学习系统，事实上是一个具有一定自组织功能的自学习系统。一个自学习系统一般应有足够大的信息储存或记忆容量，以供系统"总结经验"；也应具有快速地运算、及时作出自适应决策的能力；此外，系统还应有调整自身结构组织的能力，以适应变化了的环境。塞尔弗里奇的"群妖堂"就是一种能自我改进组织结构(清除或产生计算妖)的、具有自组织特性的系统。当然，这些人造系统还远远不能具有高等生物的自组织特性。

早期的神经控制论研究，试图用神经元的单元来构造模拟大脑的自组织网络，这种努力看来有些过于乐观。人工智能中的一个学派，正是从自组织系统中去寻找智能的机制，但是这方面的进展缓慢。

无论是"天然的"或是人造的自组织系统，都具有某些特征。当然，人造的自动机所具有的自组织性是十分有限的，超出了一定的范围就需要人来调节。为了对自组织系统有进一步的认识，有必要对一般自组织系统的特征进行分析。

系统结构的灵活性和可塑性是自组织系统的首要特征。这种系统的结构不是拼合的机械结构，为了保持系统的稳态，它能自动

地排除和调节环境的干扰，并相应地调节自己的结构和活动。

系统的反馈功能是自组织系统的第二个特征。反馈功能是一切控制论系统的重要功能，反馈与调节是分不开的，这种调节作用既包括对控制作用大小的调节，也包括对系统组织结构的调节。对于自组织系统更强调对系统组织结构的调节。

控制结构的多级结构和分散与集中相结合的控制方式是自组织系统的第三个特征。这种特征在有生命的自组织系统中表现得最为突出。对于有生命的过程是不大可能进行集中控制的，因为这样的系统都具有无数个像细胞这样复杂的子系统，任何一个器官都不可能集中收集、传输和加工来自所有子系统的信息。另一方面，在这种系统中也不可能实现没有"协调"的、完全的分散控制。如果每个细胞都单独地受到控制，并且各个细胞所完成的功能与其他细胞无关，那么作为一个整体，这样的系统将不可能具有自我调节组织结构的自组织功能。因此，在自组织系统中将有大系统的多级结构（或大系统的其他结构）和分散与集中相结合的控制方式。各部分和整体的"利益"的和谐结合是它的控制结构的基本原则。

系统的开放性是自组织系统的又一个特征。自组织系统是一个有序度逐渐增长的系统。任何系统的有序度要增加，就必须从外部得到能量和物质。这些能量和物质给系统带来了负熵，结果使系统的有序性增加。因此，自组织系统必须是开放系统，它能与外界交换能量和物质。从耗散结构理论的观点来看，自组织系统将具有耗散结构，关于这一点在前面已作了介绍。

总之，自组织系统是一种具有高级功能的控制系统，人们还无法用人造的系统代替活机体中的自组织系统。

目前，在仿生系统的研究中，人们力图在各种智能水平上复现生物系统的功能，其中主要包括学习和自组织功能。第一批出现的仿生系统之一就是概率状态可变(P.S.V)装置，它是由Adaptronic公司研制的[9]。该控制器是由神经元的部件组成的大型网络所构成，具有一定的自组织功能。这些神经元规则地或随机

地互相联接，并可在运行中为改进系统的品质来调整自己的功能。

萨里迪斯及其同事们曾设计了一个由大脑来监督和指挥的、具有多级递阶智能控制器的 p 自由度的仿生手臂。[9] 这种手臂是为截肢者或在有害环境中工作而设计的。这是一个具有自组织功能的仿人运动手臂。通过由神经系统直接连接的信号或肌电信号、或任何由操作人员对环境进行概括而作出的定性指令、人造手臂可直接从操作人员的大脑接收命令。它的多级控制系统包括三级：

(1) 语言的组织器；

(2) 模糊自动机；

(3) 一系列的自组织控制器。

语言组织器涉及到自然语言的处理；模糊自动机是一种具有决策能力的学习装置，它可以工作于不确定的环境；此处的自组织控制器是萨里迪斯提出的品质自适应自组织控制器。

学习和自组织控制已被广泛地研究和应用。在工业过程和控制中的应用可参见文献[9]。再励控制技术在空间飞船控制中也得到了应用。除了"硬科学"以外的领域，学习和自组织控制理论也可望获得应用，尽管这些方法还有可争议之处，但研究工作并未因此而停顿。

10 大 系 统

10.1 引言

大系统理论是控制论发展的一个新阶段。它是从70年代开始逐渐形成的一个专门领域。随着社会的进步和科学技术的发展，人们迫切需要研究变量数目很大的多变量系统，诸如社会经济系统、生态系统、能源系统等等。对于这些宏大的复杂系统，控制论的基本理论和方法是否仍然适用？控制论能否用来分析和控制社会系统？这些问题愈来愈引人注目，并迫切需要解决。控制论面临新的挑战。

在历史上，上述问题曾引起过激烈的争论，争论的焦点不仅在科学理论和方法方面，而且也涉及哲学观点。有些人曾认为用控制论去分析和控制宏大的社会系统不仅是不可能的，而且是不应该的，甚至把控制论作为"伪科学"加以批判[4]。这种形而上学的错误观点，已经被近20年来的客观实际所完全否定。自70年代以来，由于社会经济、现代工业生产和科学技术的发展，特别是计算机功能的进一步完善化，使得大规模控制系统的建立不仅是必要的，而且是可能的。1972年，在维也纳成立了国际应用系统分析研究所，它研究全球性的大系统问题。如地球资源、人口、生态、能源系统。1976年国际自控联(IFAC)召开了"大系统理论及应用"的专题讨论会，进入80年代以来，大系统理论的研究和应用发展更为迅速。在理论上，它涉及到大系统的建模和辨识、模型的简化、稳定性、结构和信息研究以及大系统的递阶和分散优化控制等。这些理论研究的成果，已被广泛应用于经济管理、人口预测，交通运输、资源开发、环境保护、空间技术、工业控制等领域，已有许多成功的实例。

当然，大系统的研究不仅与控制论有关，还涉及到许多学科。在本世纪40年代形成和发展起来的系统工程和运筹学与大系统理论密切相关，大系统理论和应用已经成为一个多学科交叉综合的研究领域。

本章将简要介绍大系统理论的基本概念和动态大系统的递阶和分散优化控制。

10.2 大系统的基本概念

什么是大系统？大系统具有哪些特征？这是大系统研究首先要回答的问题。但是至今为止，关于大系统还没有一个统一的定义。通常将大规模的复杂的信息系统称之为大系统。人们往往从系统的某些特征去区分一般系统与大系统。大系统的特征主要是以下几个方面[10,11]：

第一，系统模型的维数很高。主要指元件、部件多，包含许多子系统，可能有几百甚至几千个变量。

第二，系统结构复杂。主要指系统包含许多个相互关联的子系统。整个系统的特性既体现在各子系统的单独特性上，同时也体现在它们之间相互关联的特性上。

第三，系统功能综合。表现为大系统往往具有多个目标，这些不同的目标甚至是互相冲突的，需要用多目标决策和优化的方法。

第四，因素众多。主要指大系统所处的内外环境很复杂，系统的时空分布特殊。系统可能沿地理分布很广，例如，河流污染的控制问题；系统模型可能存在不同的时标，即多时标系统，例如，一个多级的生产计划系统，其各个级时标可能相差很大。

由于上述特点，大系统的信息采集和处理，系统的模型结构和控制方式都与一般系统有所区别，正是这些区别形成了大系统控制理论的特色。此外，对于大系统而言，控制与管理很难明确地加以区别。既可以从控制的角度，也可以从管理科学的角度去研究。前者主要与控制论有关，后者则侧重于系统工程。

从控制理论的角度来分析，一个大系统的控制问题，往往被分解为若干相互关联的子系统的控制问题。按照信息交换的方式和关联处理的方式可以分为以下三种控制形式[11]：

(1) 分散控制系统。在这种系统中，每个子系统只能得到整个系统的部分信息，也只能对系统变量的某个子集进行操作和处理，各自都有独立的控制目标。这与在集中控制中集中获取、使用和处理信息的方式完全不同。

(2) 分布式控制系统。在这种系统中，各子系统的控制单元是按子系统分布的。整个系统的控制目标事先按一定方式分配给各子系统的控制单元，它们之间可以有有限的信息交换。这种布局使得控制的可靠性、灵活性都有所改善，也降低了成本。

(3) 递阶控制系统。在这种控制系统中各子系统的控制作用是由按照一定优先和从属关系安排的决策单元来实现的。同级的各决策单元可以同时对下级施加作用，也同时受到上级的干预，子系统可通过上级在同级之间互相交换信息。

为了实现对大系统的递阶控制，大系统本身必须实行递阶描述。这种描述方式有以下三种形式[10]：

1) 多重描述(Stratified description)。所谓多重描述是指用一组模型从不同的抽象程度来对系统进行描述，这就形成了不同的层次，每一层都有相应的变量和需要服从的规律等等。在这种描述中，层次的选择取决于观察者的知识和兴趣；每一层次都有自己的一套术语、概念和原理，它们可以是物理概念和规律，也可以是经济概念和规律；沿着这种递阶结构越往下层则对系统的具体内容了解得越细，越往上层则对系统的意义了解更深。

2) 多层描述 (Multip layer description)。这是从决策复杂性的程度来将系统分级。它按任务或功能来分层，各层之间存在不同的分工。一般说来，层次越高，功能越复杂，决策的复杂性越高，干扰的变化较慢；反之低层的功能较单纯，干扰的变化也较快。多层描述的控制结构如图 10-1 所示。直接控制层的任务是在扰动的影响下，力图使过程的有关变量维持在设定值；优化层的任

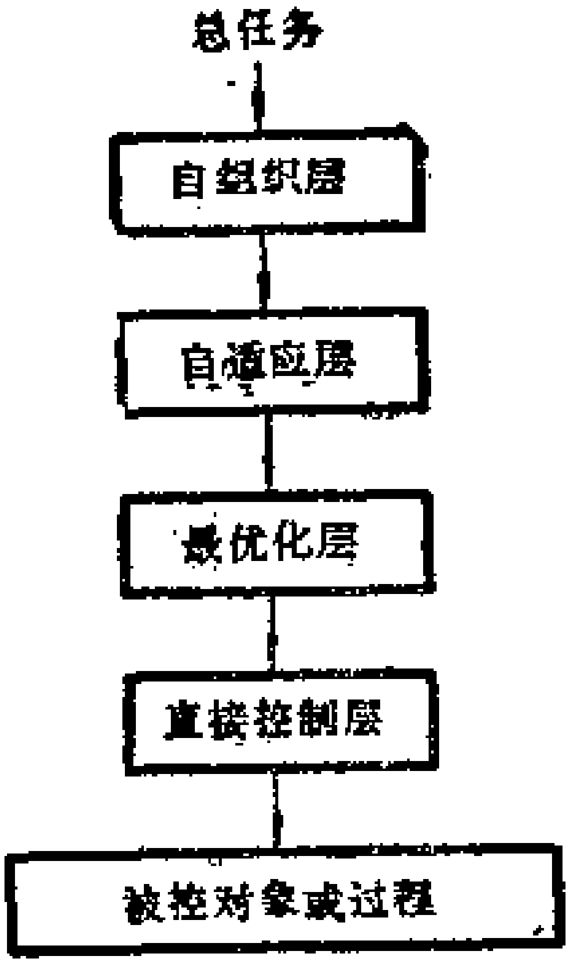


图 10-1 多层控制结构

务是按照一定的最优性能指标来规定直接控制层各控制器的设定值；自适应层的任务是根据对实际系统运转情况，采取相应的适应性措施以保持系统最优运转的机构与功能，例如，它可以在线辨识优化层中所使用的模型的参数，使模型能跟踪变化的实际过程；自组织层的任务是根据大系统的总目标、总任务及环境条件的变化来选择和制定下层所采用的模型结构、控制策略、计划协调及组织管理的机构与功能，例如，由于环境扰动的影响，总目标有了变化，它可以自动改变优化层中所用的性能指标。多层结构的典型例子是电力系统。在电力系统中，为了保证安全用电，系统的控制作用按任务可以分为预防层、恢复层和紧急层，以对付各种影响安全供电的扰动。在钢铁企业和化工生产过程中，也常常采用多层结构。

3）多级描述 (Multilevel description)。在这种递阶结构中，系统由若干明显可分的相互关联的子系统组成。所有的决策单元按照一定的支配关系递阶排列。各级单元之间存在着“上下级关系”，同级单元之间各自具有一定的自由度，但其决策目标可能会发生冲突，而需由上级协调。这种结构还可以分为：单级单目

标系统，单级多目标系统和多级多目标系统。多级结构框图如图10-2所示。

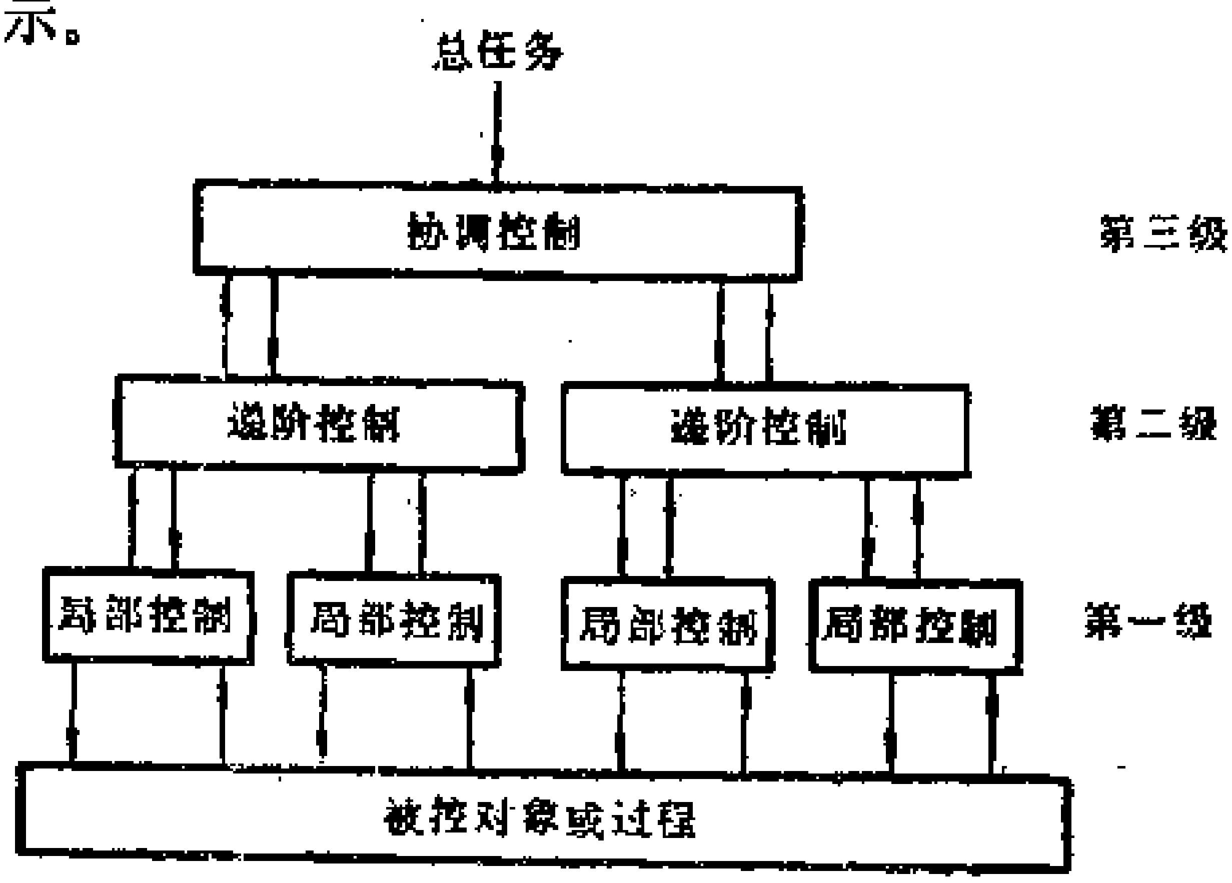


图 10-2　多级递阶控制结构

多级结构的典型例子是人的神经系统。其外周神经相当于局部控制级，直接控制着人体的各个有关部位。中枢神经系统分为低级部位与高级部位。脊髓是低级中枢，它由三十一个神经节段组成，控制着外周神经。脊髓又受到延脑、中脑、桥脑、立脑、大脑和大脑皮质这些高级中枢的控制。这样就构成了整个神经系统的多级控制结构。当然，级别的划分具有一定的相对性，与所考虑的系统及条件有关。

以上三种基本递阶形式是从不同的角度来划分的，多重结构描述主要是从建模来考虑的；多层结构描述是将大系统的决策问题纵向分解，按任务的复杂程度来分层描述；而多级描述则是考虑到各子系统的关联把决策问题进行横向分解。这三种形式并不是互相排斥的，可以同时存在于一个系统之中。对于一个实际的大系统，它的内在结构形式完全可能是上述三种形式的组合。

综上所述，可见大系统的模型结构是复杂的，即使是确定型系统，其数学模型的维数也是很高的，以至于它的求解，即使用最高速的计算机也无法解决，因此，人们不得不研究大系统模型的降价问题，或称为模型简化问题，这是大系统研究中出现的新问题。自

60年代末开始，大系统模型简化的数学方法相继出现，其中较为主要的有集结法(Aggregation Method)和摄动法(Perturbation Method)。

集结法是从经济学中引伸而来的一种方法。这种方法一般只适用于线性系统，它能将变量很多的大系统模型集结为变量较少的集结模型而保持系统的主要动态特性不变。摄动法是用摄动理论来降低模型的阶数，摄动方法又可分为奇异摄动与非奇异摄动。这种方法对于非线性系统也可适用。特别对于经济数学模型，奇异摄动法是一种有效的方法。关于这方面的详细内容，读者可参阅有关论著。

10.3 分解-协调方法

10.3.1 分解-协调的基本思想

如前所述，大系统是由彼此关联的子系统组成，每一个子系统有它自已的状态向量，控制向量和输出向量。整个系统的状态、控制和输出向量被定义为相应子系统向量的组合，例如，在城市交通网中，各子系统都有自已的控制向量(交通管制灯)和状态向量(路口的车队排队情况)。在钢材的轧制过程中，子系统是各台轧机，局部控制是各个压下螺母的行程，状态是厚度、温度及某些冶炼性能。简单地说，大系统可以理解为变量数目很多，结构复杂的多变量系统。因此，多变量系统中所研究的问题，如能控性、能观性、稳定性，系统辨识、最优控制等，对于大系统同样存在。在多变量系统理论中，解决上述问题时所获得的某些成果和方法，原则上是可以应用到大系统的，但是由于大系统本身的特点，使得这些成果和方法的应用会发生很大的困难，甚至无法应用。

例如，对于线性二次型问题的动态最优化，即使是20个变量的系统也只要用到一个中等计算机的存储容量，而对于有约束条件的线性和非线性问题，5～10个变量也嫌太多。至于实际中重要的大规模工业系统，城市交通网系统或环境系统，变量的数目是如此之多，以致于最优化所必需的计算量是大得难以实现，直接

求解这类问题的一切尝试都遇到了很大的困难。由于这个"维数灾难"，使得大系统的直接在线最优控制，在计算上不能实现。因此，在小系统上适用的所谓"一揽子"求解方法，在大系统上是行不通的。

为了克服上述求解上的困难，人们被迫采用分散最优化的方法。这是因为，每一个小系统的阶数比起"一揽子"方式考虑的整个系统的阶数要低得多，而且小系统的求解，仅需一台小型计算机，这种小型机不仅价格便宜，而且，安装使用也很方便。

但是，这种分散求解子系统最优化以代替集中最优化的方法，又会产生新的问题：局部的最优化并不等价于整体最优化，必须反复协调局部的最优解以得到整体最优解。这个协调者的角色是任何子系统的计算机无法扮演的，问题的复杂性又进一步迫使人们设置专门的协调机构。

因此，对于求解大系统最优化问题，既不能"一揽子"求解，也不能单纯的分散，而是要既分散又协调，这就是求解大系统最优化的基本思想和方法：分解-协调。

从哲学上看，这种"分解-协调"的思想把"大系统"与"小系统"有机地联系起来，它可以"化大为小"，也可以"变小为大"。它解决了"大"与"小"、"整体"与"局部"之间的矛盾。整体和局部之间的辩证关系，正是分解-协调方法的哲学依据。在大系统的研究中，人们正是利用"分解-协调"的思想，将现代控制理论中的丰硕成果，推广应用到大系统理论中去，形成了一些很有特色的方法。

根据"分解-协调"的思想构成的大系统控制系统必然是递阶控制结构。低一级的控制器承担子系统的控制任务，高一级的控制系统负责协调局部的最优解以得到整体的最优解。这种递阶最优化的方法既可降低计算机的存储量，又可减少计算时间。递阶结构对系统的安装、运转和修改也有其有利之处，具体地说，有以下优点：

(1) 系统的结构容易改变。

(2) 由于系统容易添加并行的备用子系统，因此有高度的可

靠性。

(3) 与"一揽子"集中控制的情况相比较，软件更简单，在许多地方可用相同的标准件，因此，实际实现系统的费用较低。

(4) 系统的容量容易增加，这总是重要的，因为大规模系统通常是逐步建立的，采用递阶的方法，在任何运转阶段，都能确保系统具有接近最优的性能。

10.3.2 线性大系统的递阶控制

下面以"线性二次型"问题为例，说明对一个具体的大系统是如何运用分解-协调方法去构造递阶控制的。

设线性大系统的状态方程为

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\ x(t_0) = x_0。 \tag{10-1}$$

其中$\dot{x}$为$n\times 1$状态向量，u为$r\times 1$控制向量，A、B分别为$n\times n$和$n\times r$常数矩阵。二次型目标函数为

$$J = \frac{1}{2}x^T(t_f)Px(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt \tag{10-2}$$

寻求控制$u(t)$使目标函数J最小。这就是线性二次型问题。按照最优控制的理论，是采用以"一揽子"方法来进行求解的，对于大系统，需首先将系统分解。设矩阵 B、P、Q、R皆为对角线矩阵。则原系统可以写为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \cdots\\ \dot{x}_m\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mm}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \cdots\\ x_m\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}B_1 & & & 0\\ & B_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ \cdots\\ u_m\end{bmatrix}, \tag{10-3}$$

或写为：

$$\dot{x}_i = A_{ii}x_i + B_iu_i + \sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{m} A_{ij}x_j,\ i = 1, 2, \cdots, m。 \tag{10-4}$$

A_{ij}, B_i分别为 A和B的分块矩阵，并假定A_{ij}为 $n_i\times n_j$ 矩阵，B_i为$n_i\times r_i$维矩阵，显然，

$$\sum_{i=1}^{m} n_i = n, \quad \sum_{i=1}^{m} r_i = r。 \tag{10-5}$$

在式 10-4 中，最后一项表示其他子系统对第 i 个子系统的影响，将这一项记为Z_i

$$Z_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} A_{ij}x_j, \quad i=1,2,\cdots,m。 \tag{10-6}$$

所以式 10-4 可以写成：

$$\dot{x}_i = A_{ii}x_i + B_iu_i + Z_i, \quad i=1,2,\cdots,m。 \tag{10-7}$$

称方程式 10-6 为关联约束方程。Z_i 称为关联变量。同样目标函数也可以分解为如下形式：

$$J = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} x_i^T(t_f)P_ix_i(t_f)$$

$$+\int_0^{t_f}[x_i^T(t)Q_ix_i(t) + u_i(t)R_iu_i(t)]dt。 \tag{10-8}$$

为了考虑关联变量 Z_i 的影响，对上述目标函数作适当的修改：

$$J = \sum_{i=1}^{m} J_i, \tag{10-9}$$

$$J_i \hat{=} \frac{1}{2}\|x_i(t_f)\|_{P_i}^2 + \frac{1}{2}\int_0^{t_f}[\|x_i(t)\|_{Q_i}^2 + \|u_i(t)\|_{R_i}^2 + \|Z_i(t)\|_{S_i}^2]dt。 \tag{10-10}$$

式中，

$$\|x_i(t_f)\|_{P_i}^2 = x_i^T(t_f)P_ix_i(t_f),$$
$$\|x_i(t)\|_{Q_i}^2 = x_i^T(t)Q_ix_i(t),$$
$$\|u_i(t)\|_{R_i}^2 = u_i^T(t)R_iu_i(t),$$
$$\|Z_i(t)\|_{S_i}^2 = Z_i^T(t)S_iZ_i(t)。$$

从整体情况来看，解释二次型项 $\|Z_i(t)\|_{S_i}^2$ 的物理意义是困难的，因为对整个系统而言，它总是含于 $\|x(t)\|_Q^2$ 项之中。引入此项的主要目的是为了避免求解过程中的奇异性[10]。

如上所述，已将系统和目标函数实行了分解。分解后的子系统和子目标为

$$\dot{x}_i = A_{ii}x_i + B_iu_i + Z_i,$$

$$J_i = \frac{1}{2}\|x_i(t_f)\|^2_{F_i} + \frac{1}{2}\int_0^{t_f}[\|x_i(t)\|^2_{Q_i} + \|u_i(t)\|^2_{R_i}$$
$$+ \|Z_i(t)\|^2_{S_i}]dt,$$
$$i = 1, 2, \cdots, m。$$

这仅仅是大系统最优化的“分解-协调”方法的一个侧面，即“分解”。另一方面，对于各子系统求出的最优策略，还必须实行“协调”，使得由它们可以构成整体最优的策略。

为了得到“协调”的方法，写出整个大系统的哈密尔顿函数：

$$H(x, u, z, \lambda, \pi) = \sum_{i=1}^{m}\left\{\frac{1}{2}\|x_i\|^2_{Q_i} + \frac{1}{2}\|u_i\|^2_{R_i}\right.$$
$$+\frac{1}{2}\|Z_i(t)\|^2_{S_i} + \pi_i^T\left(\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{m} A_{ij}x_j - Z_i\right)$$
$$\left.+\lambda_i^T(A_{ii}x_i + B_iu_i + Z_i)\right\} \triangleq \sum_{i=1}^{m} H_i。 \quad (10-11)$$

根据最小值原理，可以由下列方程构成最优化的必要条件：

$$\left.\begin{aligned}
\dot{x}_i &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_i},\\
\dot{\lambda}_i &= -\frac{\partial H}{\partial \lambda_i},\\
\frac{\partial H}{\partial u_i} &= 0,\\
\frac{\partial H}{\partial z_i} &= 0,\\
\frac{\partial H}{\partial \pi_i} &= 0。
\end{aligned}\right\} \quad (10-12)$$

初始条件和终端条件为

$$x_i(t_0) = x_i,$$
$$\lambda_i(t_f) = P_i(t_f)x_i(t_f)。$$

然而要“一揽子”求解$x_i, \lambda_i, u_i, z_i, \pi_i$是很困难的。由于关联方程式10-6的存在，虽然将大系统已经分解为 m个子系统，但却不能分解为m 个子问题来求最优解。克服这种困难的方法就是分级求解，

即将x_i, λ_i, u_i, z_i π_i分为两组，第一组称为因变量，它与第一级子系统的最优化相关；第二组称为独立变量，是由第二级即协调级来调整，称之为协调变量。不同的分法将得到不同的递阶控制方案。

例如，在求解式 10-12 的方程组时，先假定π变量为独立变量，由第二级来协调。亦即设定π值，这样在求解式 10-12 方程组的过程中，π被当作已知的量，这就使得整个求解问题被简化，方程$\frac{\partial H}{\partial \pi_i}=0$在第一级计算时不予考虑。而由其余几个方程求解出$x_i$, λ_i, u_i, z_i，利用求出的这些量可以验证

$$\frac{\partial H}{\partial \pi_i}=0\ (i=1,2,\cdots,m)$$

是否被满足亦即：

$$z_i=\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{m} A_{ij}x_j\ (j=1,2,\cdots,m)\text{是否被满足。}$$

如果该关联约束条件不被满足，则要调整π的值，这个调整的任务由第二级协调级来完成，因此π的选择是一个迭代搜索的过程，可以采用如下的梯度技术，如最速下降法：

$$\pi^{(k+1)}=\pi^{(k)}+\mu^{(k)}\left(\frac{\partial H}{\partial \pi}\right)^{(k)}。\qquad (10\text{-}13)$$

其中，$\pi^{(k+1)}$表示第$k+1$步的π迭代值，$\mu^{(k)}$为迭代计算的步长，由一维最优求出。

这种递阶方案可如图 10-3 所示。

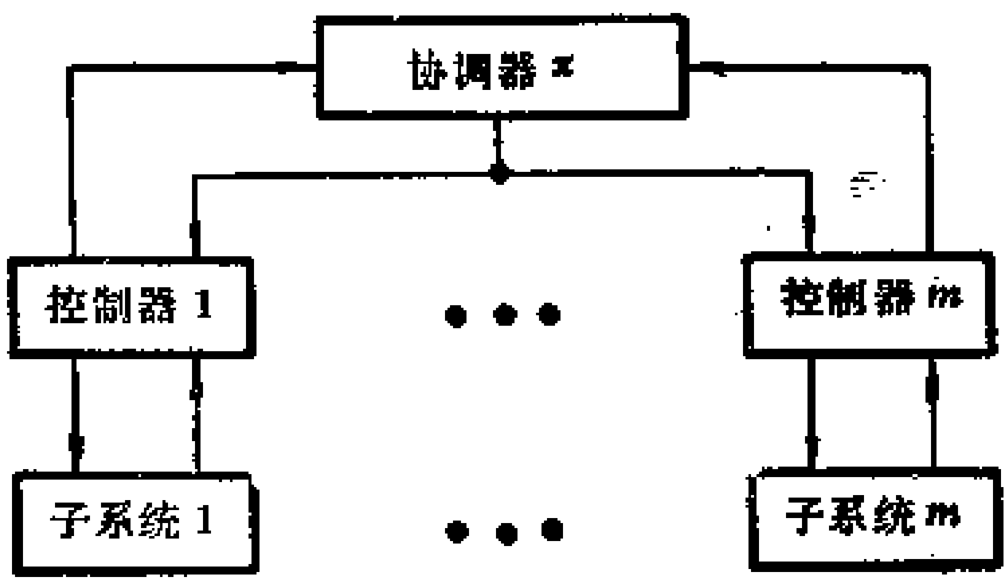


图 10-3 二级递阶控制

在上面所述的分解-协调方法中，下层各决策单元在求解自己的优化问题时，不考虑关联约束，而把关联变量当作独立寻优变量来处理。

在整个优化过程中，关联约束条件始终不被满足，只是在最优化过程结束时，这个条件才被满足。因此，这种方法又称为非可行分解-协调方法，或称为目标协调法和关联平衡原则。

除了这种非可行方法之外，还有种种分解-协调方法，例如，基于关联预测原则的协调方法。按照这种方法，协调器要预测各子系统的关联输入和输出变量。下层各决策单元按照预测的关联变量求解各自的控制策略，然后把达到的性能指标值送给协调器，协调器再修正关联预测值，直到总体目标达到最优为止。这是一种可行性方法。此外还有混合分解-协调算法、协状态向量协调方法、控制向量协调方法等等，有兴趣的读者可以参阅文献[10]，此处不再详细介绍。

大系统最优化的“分解-协调”方法，是因大系统理论研究的需要而产生出来的，然而，从方法论的角度来看，包含在这种方法中的基本思想是具有普遍意义的。它不仅可以处理最优化问题，而且可以用来研究大系统的其他特性。例如稳定性问题，也是先把大系统的稳定分解为子系统的稳定性，然后求出大系统和子系统之间的稳定性关系，通过协调来解决大系统的稳定性。

10.4 分散控制

迄今为止，应用最广泛的控制方式是集中控制方式。这对于规模不大、结构不太复杂的系统是可行的。这种控制的有效性与信息的有效采集、传输和加工密切相关。但是，对于一个大系统而言，由于它在时空分布上的分散性，人为地实行集中控制，势必带来信息传输和加工的困难，不能实现有效控制，而且在经济上代价昂贵。因此，在大系统中通常采用分级多点的分散控制。小型计算机功能的不断完善和价格的便宜，从技术上保证和促进了分散控制的实现和发展。

分散控制是将一个大系统按其所分布的许多子系统，分别采用独立的局部控制器来控制。每个控制器只能直接得到一部分状态信息，采集部分数据，而不可能得到整个系统的状态信息。另一方面，每个控制器又只能对大系统的某个局部进行控制，而不能对其他部分施加直接控制作用。但是，局部控制器却能在一定程度上获得邻近控制器的状态和控制信息，使之能部分地判断自己的控制作用对全局的影响。

在10.3介绍的递阶方法中，整个系统分成许多独立的子系统，用一个协调器来考虑子系统间的相互作用，这是通过较低级和协调级重复的信息交换来实现的。因此，在原则上，协调级可以拥有它所协调的各局部控制级的全部信息。这种递阶结构具有所谓“经典信息模式”，它与集中控制方式，在信息的采用方式上是类似的。但是，分散控制系统是没有统一的协调级，是一种无集中的控制，它具有“非经典信息模式”。其框图如图10-4。

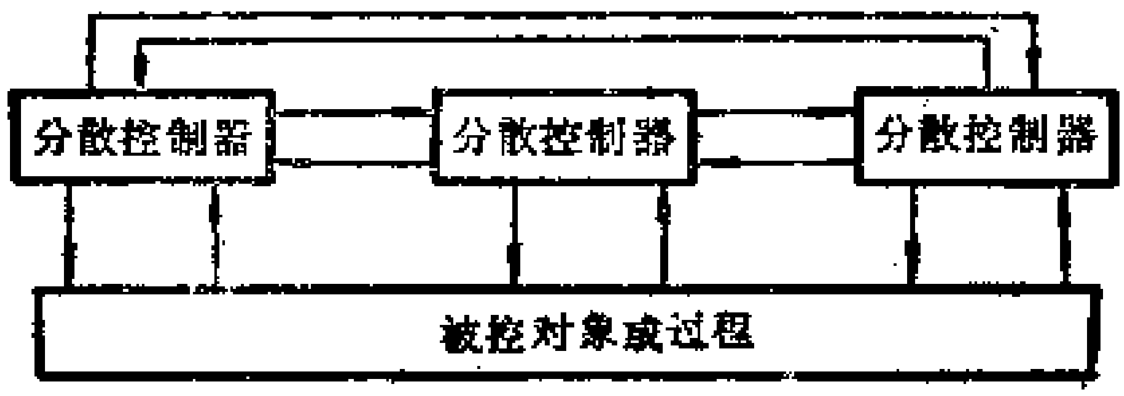


图 10-4 分散控制结构

分散控制结构是广泛存在的。例如一个大地区的电力系统，在这个系统中的每一个发电厂可以看成是一个子系统，它有自己的局部控制中心，可以直接测量本电厂发电机组的运行参数，同时可得到相邻电厂的负荷或参数作为自己的参考信息，但却不能得到整个电力网中所有电站的负荷或其他参数，因此它的控制是局部性的。又如，一个大城市的交通管理，它不是通过集中的调度中心来统一指挥的，而是由许多分叉路口的交通岗来共同完成调度管理任务的，每个交通岗仅具有局部控制作用，但它也是一定程度上影响到整个城市的交通管理。对人体的神经系统而言，它既是一

个分级控制结构，又是一个分散控制结构。例如人的膝跳反射就不是通过高级中枢，而是通过脊髓直接完成的。

对于分散控制系统，一方面各局部控制器之间是相互作用的，需要有必要的信息交换，另一方面又只能利用局部信息。因此，大系统的分散控制首先要解决“信息结构”问题，关于这个问题，近十多年来已有了比较深入的研究。正是由于大系统的特殊信息结构，经典的最优化概念不再适用，新的概念需要引入，新的理论急待建立。目前，大系统分散控制理论的研究主要是二个方向。一个是关于分散控制的最优化问题研究；另一个是关于分散控制系统的各种性质的研究。

分散控制的最优化问题主要是针对随机分散控制系统的。它的研究起始于威辛豪逊(Witsenhausen)的著名反例。这个反例是关于随机控制中的LQG问题。对LQG问题，分离定理是成立的。但是，威辛豪逊证明了在非经典信息结构时，即存在许多具有不同信息的控制站且各站的信息相互依赖时，分离定理不再成立。事实上，分离定理与系统的信息结构有关，在系统是经典信息结构时，分离定理是成立的。这个著名的反例促进了分散控制理论的研究。

分散控制是以存在许多决策者为特征的，这些决策确定了系统的状态变化。设系统的状态变化由下式表示：

$$\dot{x} = f(x, u_1, \cdots, u_N) \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_f。 \tag{10-14}$$

其中，$x \in R^n$，$u_i \in R^{m_i}(i=1,\cdots,N)$ u_i 表示第 i 个控制器的控制变量。设第 i 个控制器的目标 J_i 具有如下形式：

$$J_i = \int_{t_0}^{t_f} g_i(x, u_1, \cdots, u_N)\,dt。 \tag{10-15}$$

函数 f、g_i 满足一定的光滑条件，状态的初值和(或)终端条件假设已给定。

在上述描述中每个控制器都有自己的独立目标，没有一个控制器可以按自己的决策来控制整个系统。当考虑随机系统时，式10-14中将包含随机项。当 $g_1 = g_2 = \cdots = g_N$ 时，就成为队决策问

题。如果所有决策者具有关于系统的相同信息，则队决策问题就简化为经典最优控制问题。如果只有二个决策者，且 $g_1=-g_2$，那么就是所谓二人零和微分对策问题。在这种对策中，不存在决策者的合作现象。

在存在合作的情况下，其解答称为佩尔托(Pareto)解。此时不存在一个对所有决策者都有比较好的解答。

在非合作的情况下，一个决策者不可能单方面改善他的结果。这个解称为纳什(Nash)解。纳什解的定义如下：

若存在 $u_1^*,\cdots,u_N^*$ 使得

$$J_i(u_1^*,\cdots,u_N^*)\leqslant J_i(u_1^*,\cdots,u_{i-1}^*,u_i,u^*_{i+1},\cdots u_N^*),\quad i=1,2,\cdots,N。$$

则称 $u_1^*,\cdots,u_N^*$ 为纳什解。

例如，考虑一个二人决策问题，他们各具有以下目标函数：

$$J_1=(1-u_1)^2+u_2^2,$$
$$J_2=(1-u_2)^2+u_1^2。$$

那么，纳什解由方程

$$\frac{\partial J_1}{\partial u_1}=0、\qquad \frac{\partial J_2}{\partial u_2}=0$$

可得： $u_1^*=u_2^*=1$。

因为目标函数对称，显然纳什解满足 $u_1=u_2$。若令 $u=u_1=u_2$，代入目标函数，然后关于 u 求最小，可得 $u=u_1=u_2=\frac{1}{2}$，这就是一个佩尔托解，它显然不同于纳什解。

在分散控制中，除了用上述对策论的方法研究优化问题之外，以何毓琦(Y.C.HO)和祝开景(K.C.Cun)所开创的基于队论(Team Theory)的方法是另一类重要的方法。所谓"队"是指一个组织，在这个组织里有一个对所有成员共同的单一目标。如果队中每一成员所拥有的信息和决策与其他成员无关，这种队称为静态的。队论最初是由马斯哈克(Mayschak)和拉德尼尔(Radner)等创建并用于经济系统的决策。何毓琦等把静态型扩展到动

态，提出了部分嵌套式的动态型，并把这种类型归结为静态型。在LQG问题的条件下，使得随机系统分散控制的最优解有了线性形式。但在一般信息结构下的最优化解仍是一个困难的问题。

在分散控制系统性质方面的研究。近年来有了迅速的发展。其中关于可稳定性和极点任意配置性的研究较为集中，取得的成果较多。在分散控制系统中的可稳定性和极点可任意配置性是指能否通过各控制站本身所获得的信息对操作量作适当的局部反馈，使整个系统达到稳定和极点的任意配置。在这方面，王锡和戴维逊(E. J. Davison)、科夫曼特(Corfmat)、莫尔斯(Morse)作出了突出的贡献，分别得到了可稳定性和极点可任意配置性的充要条件。在分散控制器的设计技术方面，已提出了多种可行的方法，并用小型机系统实现分散控制。

总之，分散控制系统的研究工作已取得了许多成果，它已被成功地用于资源分配、城市交通管理、计算机的数据库管理、电力和生态系统等方面。但是，无论在理论上还是在实践中，分散控制系统的研究和应用远未达到成熟的阶段，有待于进一步发展。

11 模糊控制

11.1 引言

模糊控制的理论和方法是本世纪70年代中期发展起来的，产生模糊控制的原因主要来自两个方面：

首先，在系统工程、经济学、人工智能、心理学、医学、生物学等领域中，往往很难用传统的精确数学方法建立研究对象的数学模型。在这些领域中，需要研究和处理具有"模糊性"的现象。这里所谓的"模糊性"，主要是指客观事物差异的"不分明性"，例如"高个与矮个"、"清洁与污染"、"美与丑"、"晴与多云"等等都难以明确地划分界限。为了对这样一些具有模糊性的系统进行分析和控制，人们必然需要研究模糊控制的理论和方法。

其次，控制论的深入发展促使人们去研究人类本身，除了将人作为一个系统进行研究之外(这是生物控制论的研究课题)，还要研究"人是怎样进行控制的"问题。

如果仔细观察和分析人在实现控制操作时的特征，可以发现操作人员的控制方法是建立在直观和经验的基础之上，它具有如下两个特点：

(1) 由于人脑的思维和判断的"不精确性"，使得人的控制动作往往是不稳定和主观的。因此，人的控制行为很难用精确的数学语言来描述。

(2) 虽然人的思维具有"不精确性"，但是人却能对一些复杂的度量模式(如颜色、气味等)和一些根本无法度量的特征，作出迅速的反应，采取相应的控制行为。人的这种"本领"是任何人造机器所不及。

显然，只能用一组用语言表达的、定性的、不精确的判定规则

来描述人的控制行为。这样一组规则被称为模糊算法。例如在锅炉操作人员的控制中，有如下的推理："若煤油输入量大，则温度远大于100℃"，这里的"大"和"远大于"就是所谓的模糊语言，上述推理被称为似然推理或近似推理。

上述两方面的原因促使控制论学者去研究更接近于人的智能的"模糊控制"，试图吸收人的控制行为的优点，创造出更为高级的控制论机器。

模糊数学的诞生为模糊控制奠定了理论基础。模糊数学诞生于1965年，它的创造者是美国自动控制专家查德(L. A. Zadeh)教授。他首先引入了"隶属函数"这个概念，用来描述差异的中间过渡，这是精确性对模糊性的一种逼近，因而他首次成功地运用了数学方法描述模糊概念。这是一个具有重大意义的开创性工作。9年以后，英国的马丹尼(Mamdeni)首先把模糊集理论用于锅炉和蒸汽机的控制，实用效果良好，这一工作标志着模糊控制的诞生。以后在英国、丹麦、荷兰等国先后对热交换过程、烧结工厂原料混合渗透率，以及压力容器等进行了模糊控制，都取得了实效。1976年英国的汤(Tong)发表了第一篇关于模糊控制的理论性论文。1980年我国学者汪培庄、楼世博给出了模糊控制器的数学定义，并提出可响应问题。

目前，世界许多国家对于模糊控制的研究都引起了普遍的关注。模糊控制器在十字路口的交通管理、水位控制、人机系统、压力控制、学习系统、自组织控制系统等许多方面的应用都获得了成功。这类用模糊语言的控制方法，总结起来有以下几条优点：

(1) 不需要预先知道研究对象的精确数学模型，这对于某些"软领域"的研究特别重要。

(2) 容易被具有一定操作经验的工作人员所理解和掌握。

(3) 操作人员易于使用自然语言进行人机对话，以便更好地提供控制动作等等。

在本章中，首先介绍有关模糊数学的基本概念和原理，然后对模糊控制器作一简要的介绍。

11.2 模糊集合论

模糊集理论是模糊数学的基础，自从1965年查德关于“模糊集”(Fuzzy Sets)的第一篇论文发表以后，模糊数学便作为一门新的数学分支而诞生了。20多年来，它的发展非常迅速，应用也极为广泛。为了与模糊集相区别，过去的“集合”概念被称为“分明集”。模糊集的概念是对传统集合概念的延拓和发展，它不仅开拓了数学的新领域，而且在哲学和科学方法论方面也具有重要意义。本节将简要介绍模糊集理论的一些基础知识，它们是学习模糊控制理论所必须掌握的。

11.2.1 模糊集与隶属函数

集合是数学中的一个基本概念。从德国数学家康托尔(Cantror)在1874年发表的第一篇关于集合的论文开始，至今已有100多年的历史。然而直到现在，“集合”这个概念还没有一个严格的定义。通常，将研究的每个对象(例如，人、数、动物、植物、石块等)称为元素，用小写字母a、b、x、y等表示；将被研究的全体对象称作“论域”，记为E或U。设给定了U，由U中部分元素所组成的整体，叫做U里的一个“集合”，简称集。

但是，上述关于集合的“定义”是不严格的，要用严格的数学语言去定义“集合”是非常困难的，100多年来，许多数学家举出了实例，用来说明凭借直观经验建立起来的集合概念有很多问题，这就是所谓“集合悖论”。我们仅以由英国数学家在1903年提出的“罗素悖论”为例来说明其问题，“罗素悖论”的通俗解释就是有名的“理发师问题”。

设在某个村镇有一个理发师，而且在这个村镇里制订了一条绝对不许违反的法律：“凡是自己不替自己理发的人，必须由这个理发师去理发。”现在试问：“这个理发师的发应该由谁去理？”

首先，如果理发师的发由别人理，这就是说理发师不替自己理发。但是按照法律，这样的人应由这个理发师去理发。这与法律

其次，如果理发师由自己理发。也就是说理发师是属于自己替自己理发的一类人。那么，由该村镇法律，这样的人不应该由这个理发师去理发，由此也得出矛盾。

这样就产生了一个疑问，理发师的发究竟应该由谁理才不违反法律呢？这种正与反（真与假）都不对的论题就称为"悖论"。类似的问题还很多，例如，怎样判定"我说：我是说谎者"这句话的真假是一个大难题。以下叙述著名的罗素悖论。

把所有集合分成两类：对一个集合，如果 $A\in A$（就是 A 本身是 A 集合的一个元素），就称 A 是"第一类集合"。凡不是第一类的集合，就说它是"第二类集合"。现在设 Q 是由所有第二类集合所组成的集合，也就是

$$Q=\{A \mid A\notin A\}。$$

通俗地说就是：Q 是由具有性质"$A\notin A$"的那些集合 A 所组成的。试问："Q 是第一类集合还是第二类集合？"

从逻辑上看，只有二种结论：Q 是第一类集合或 Q 是第二类集合。但是详细分析起来就会产生矛盾。

首先，如果 Q 是第一类集合，即 $Q\in Q$，但是由于 Q 集合中的元素都具有"$A\notin A$"这个性质，这就与 Q 是第一类集合相矛盾。

其次，如果 Q 是第二类集合，即 $Q\notin Q$，但是由于凡具有性质"$A\notin A$"的集合都属于Q，现在$Q\notin Q$，这表明Q不具有"$Q\in Q$"的性质，所以 Q 应该属于 Q。这又跟Q 是第二类集合相矛盾。罗素悖论的提出动摇了数学的基础，震动了数学界。在数学史上曾有一段趣闻：罗素的朋友英国数学家怀特海，曾用集合论的观点写了一本巨著，在这本巨著完成之后，罗素将自己发现的悖论告诉他，怀特海得知此事之后，非常伤心，曾经痛哭流涕地说："我建成了一座华丽、完美的大厦，但是没注意它竟座落在松软的沙滩上。"

为了"医治"集合论的致命"创伤"，数学家们提出了种种方案，形成了不同的学派。模糊数学的创始人，查德就是其中之一。查德重新研究了集合论和数理逻辑，发现这些基础学科并不完全符合

人脑的思维。在某些情况下，人们无需去追求一个命题的"真"和"假"，而且也决不是"非真即假"或"非假即真"，总会存在过渡状态。一切差异都在中间阶段融合，一切对立都经过中间环节而互相过渡，否认中间过渡的普遍存在性，正是经典集合论和二值逻辑的致命弱点。

查德认为，一个元素 a 和一个集合 A 的关系，不一定是绝对的"属于"或"不属于"的关系，而需要考虑它属于的程度是多少，这就是所谓"隶属度"的概念。为了理解隶属度的概念，首先介绍集合的特征函数概念。

设 E 是论域，任意集合 $A\subseteq E$，$x\in E$，定义下列函数

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1 & 当\ x\in A\\ 0 & 当\ x\notin A\end{cases}$$

为集合 A 的特征函数。

由此可知，特征函数只是取两个值 0 或 1 的集合，记为 $\{0,1\}$。如果从映射的观点看，特征函数 $\chi_A(x)$ 建立了集合 A 和 $\{0,1\}$ 之间的对应关系。利用集合的特征函数，可以方便地将集合之间的关系用特征函数的关系来表示（用符号 $\Longleftrightarrow$ 表示等价对应关系，A、$B\subseteq E$）：

$$\chi_A(x)\equiv 0 \quad \Longleftrightarrow A=\phi(空集),$$
$$\chi_A(x)\equiv 1 \quad \Longleftrightarrow A=E,$$
$$\chi_A(x)\leqslant\chi_B(x) \Longleftrightarrow A\subseteq B,$$
$$\chi_A(x)=\chi_B(x) \Longleftrightarrow A=B。$$
$$\chi_{A\cup B}(x)=\max(\chi_A(x),\chi_B(x)),$$
$$\chi_{A\cap B}(x)=\min(\chi_A(x),\chi_B(x)),$$
$$\chi_{\bar{A}}(x)=1-\chi_A(x)。$$

查德将上述集合的特征函数只能取 $\{0,1\}$ 两个数推广为可取 $[0,1]$ 闭区间上的所有数，这样的"特征函数"被改名为"隶属函数"，因此隶属函数建立了集合 A 和 $[0,1]$ 区间的对应关系，通常用 μ 表示，即

$$\mu: \quad U \to [0,1],$$

$$0 \leqslant \mu(u) \leqslant 1 \quad u \in U。$$

利用隶属函数的概念可以给出如下定义：

设在论域 U 上给定了映射 μ，$\mu: U \to [0,1]$，则称 μ 确定了 U 上的一个模糊子集，记为 $\underset{\sim}{A}$。μ 称为 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数，亦写作 μ_A。对于 $u \in A$，$\mu_A(u)$ 表示 u 关于 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属度。它表示 u 属于 $\underset{\sim}{A}$ 的程度。模糊子集简称为模糊集。

当 $\mu_A(u)=1$ 时，则 u 完全属于 $\underset{\sim}{A}$；当 $\mu_A(u)=0$ 时，则 u 完全不属于 $\underset{\sim}{A}$。$\mu_A(u)$ 愈接近 1，u 属于 $\underset{\sim}{A}$ 的程度就愈大。显然，隶属函数是特征函数的一般化，模糊集是普通集的一般化。为简便起见，约定

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u) = \underset{\sim}{A}(u) \text{ 或 } \mu_{\underset{\sim}{A}} = \underset{\sim}{A}。$$

[例11-1]"年轻"和"年老"是两个模糊的概念。可用模糊集来描述它们。取论域 $U=[0,100]$（年龄），设描述"年轻"和"年老"这两个模糊集分别为 $\underset{\sim}{Y}$ 和 $\underset{\sim}{O}$，年龄 u 分别属于 $\underset{\sim}{Y}$ 和 $\underset{\sim}{O}$ 的隶属度（图11-1）为：

$$\underset{\sim}{Y}(u) = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant u < 25, \\ \left[1+\left(\dfrac{u-25}{5}\right)^2\right]^{-1} & 25 \leqslant u \leqslant 100; \end{cases}$$

$$\underset{\sim}{O}(u) = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant u \leqslant 50, \\ \left[1+\left(\dfrac{u-25}{5}\right)^2\right]^{-1} & 50 < u \leqslant 100。 \end{cases}$$

上面第一式表明，不大于 25 岁的人，对于集"年轻"的隶属函数值是 1（即一定属于这个子集）；而大于 25 岁的人，对于集"年轻"的隶属函数值按 $\left[1+\left(\dfrac{u-25}{5}\right)^2\right]^{-1}$ 来计算，例如 $\underset{\sim}{Y}(40)=0.1$。对于第二式也可类似解释，当年龄为 80 岁时，$\underset{\sim}{O}(80)=0.97$，这表示 80岁属于"年老"的程度为 97%。

在给定的论域 U 上可以有许多模糊集，将论域 U 上模糊集全体记为 $\mathscr{F}(U)$，即

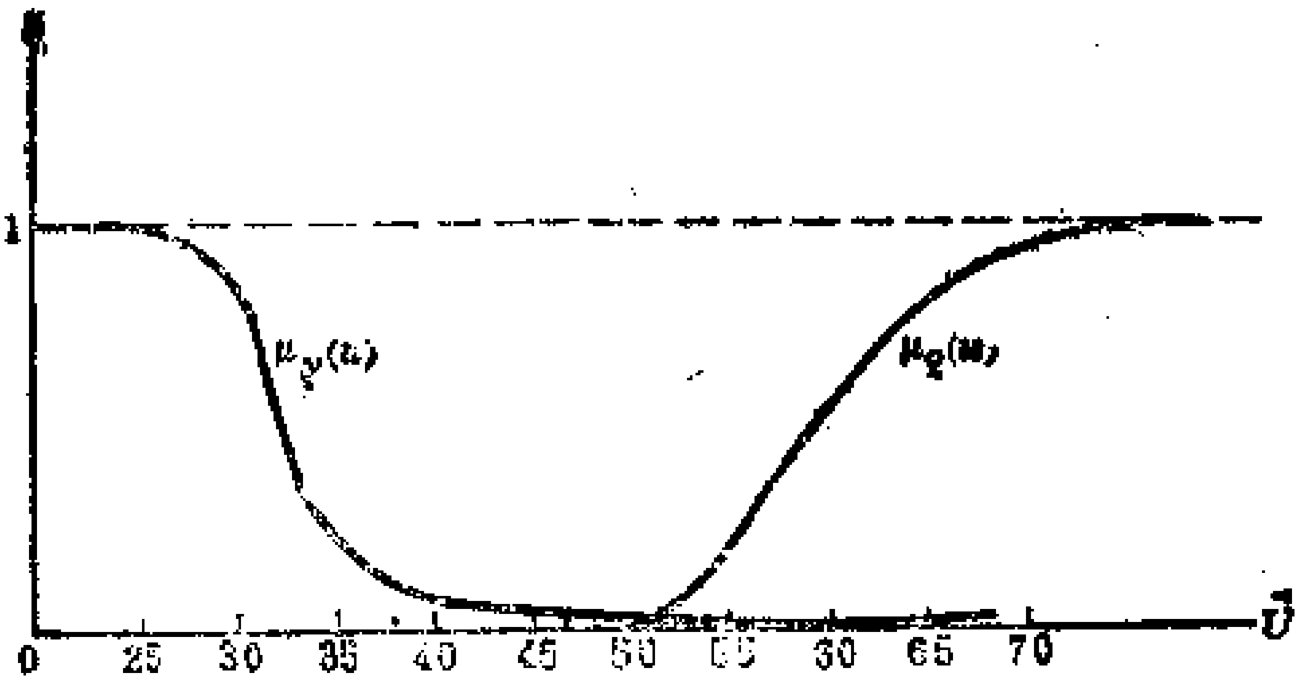


图 11-1 "年轻"与"年老"的隶属度

$$\mathscr{F}(U)=\{\underset{\sim}{A}\mid \underset{\sim}{A}, U\to[0,1]\},$$

称$\mathscr{F}(u)$为u上的模糊幂集。

模糊集的表达方式有多种，当论域u为有限集$\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$时，通常有如下三种方式：

(1) 查德表示法

$$\underset{\sim}{A}=\frac{\underset{\sim}{A}(u_1)}{u_1}+\frac{\underset{\sim}{A}(u_2)}{u_2}+\cdots+\frac{\underset{\sim}{A}(u_n)}{u_n},$$

其中，$\underset{\sim}{A}(u_i)$表示u_i对$\underset{\sim}{A}$的隶属函数。$\frac{\underset{\sim}{A}(u_i)}{u_i}$并不是表示"分数"，而是表示论域中的元素$u_i$与隶属度$\underset{\sim}{A}(u_i)$之间的对应关系，"+"并不是通常的求和运算，而是表示模糊集在论域U上的整体。

(2) 序偶表示法

$$\underset{\sim}{A}=\{(u_1,\underset{\sim}{A}(u_1)),(u_2,A(u_2)),\cdots,(u_n,A(u_n))\}。$$

(3) 向量表示法

$$\underset{\sim}{A}=(\underset{\sim}{A}(u_1),\underset{\sim}{A}(u_2),\cdots,\underset{\sim}{A}(u_n))。$$

当U是非离散的情况时，查德的记法为：

$$\underset{\sim}{A}=\int_U\frac{\underset{\sim}{A}(u)}{u}$$

同样$\frac{\underset{\sim}{A}(u)}{u}$并不表示"分数"，"∫"既不表示"积分"意义，也不是"求和"记号，而是表示论域U上的元素u与隶属度$\underset{\sim}{A}(u)$对应关系

的一个总括。

对于模糊子集的运算，可以转换为对于隶属函数的运算，与上述特征函数的各种关系相对应，隶属函数有以下关系：

$$\underset{\sim}{A} = \phi \Longleftrightarrow \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = 0,$$

$$\underset{\sim}{A} = U \Longleftrightarrow \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = 1,$$

$$\underset{\sim}{A} \subseteq \underset{\sim}{B} \Longleftrightarrow \mu_{\underset{\sim}{A}}(u) \leqslant \mu_{\underset{\sim}{B}}(u),$$

$$\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{B} \Longleftrightarrow \mu_{\underset{\sim}{A}}(u) = \mu_{\underset{\sim}{B}}(u),$$

$$\bar{A} \Longleftrightarrow \mu_{\bar{\underset{\sim}{A}}}(u) = 1 - \mu_{\underset{\sim}{A}}(u),$$

$$\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{C} \Longleftrightarrow \mu_{c}(u) = \max[\mu_{\underset{\sim}{A}}(u), \mu_{\underset{\sim}{B}}(u)],$$

$$\bar{\underset{\sim}{A}} \cap \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{D} \Longleftrightarrow \mu_{D}(u) = \min[\mu_{\underset{\sim}{A}}(u), \mu_{\underset{\sim}{B}}(u)]。$$

例［11-2］ 设论域$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$，

$$\underset{\sim}{A} = \frac{0.5}{u_1} + \frac{0.3}{u_2} + \frac{0.4}{u_3} + \frac{0.2}{u_4},$$

$$\underset{\sim}{B} = \frac{0.2}{u_1} + \frac{0}{u_2} + \frac{0.6}{u_3} + \frac{1}{u_4}。$$

此即表示，u_1, u_2, u_3, u_4对模糊子集$\underset{\sim}{A}$的隶属度分别是0.5，0.3，0.4，0.2，对$\underset{\sim}{B}$的隶属度分别为0.2，0，0.6，1。

利用上述运算关系式可以求得：

$$\bar{\underset{\sim}{A}} = \frac{0.5}{u_1} + \frac{0.7}{u_2} + \frac{0.6}{u_3} + \frac{0.8}{u_4},$$

$$\underset{\sim}{B} = \frac{0.8}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{0.4}{u_3} + \frac{0}{u_4},$$

$$\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} = \frac{0.2}{u_1} + \frac{0}{u_2} + \frac{0.4}{u_3} + \frac{0.2}{u_4},$$

$$\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B} = \frac{0.5}{u_1} + \frac{0.3}{u_2} + \frac{0.6}{u_3} + \frac{1}{u_4}。$$

若论域是实数域R，则将隶属函数称为模糊分布，常见的有以下几种类型：

(1) 正态型模糊分布

$$\mu(x) = e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^2} \quad (b > 0),$$

图 11-2a 所示。

(2) 戒上型模糊分布

$$\mu(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+[a(x-c)]^{b}} & x>c\ , \\ 1 & x\leqslant c\ 。\end{cases}$$

其中，$a>0$，$b>0$ 如图 11-2b 所示。

(3) 戒下型模糊分布

$$\mu(x)=\begin{cases}1 & x\geqslant c\ 。\\ \dfrac{1}{1+[a(x-c)]^{b}} & x<c\ 。\end{cases}$$

其中，$a>0$，$b>0$ 如图 11-2c 所示。

(4) P 型模糊分布

$$\mu(x)=\begin{cases}0 & x<0\ , \\ \left(\dfrac{x}{\lambda\nu}\right)^{2}e^{\nu-\frac{x}{\lambda}} & x\geqslant 0\ 。\end{cases}$$

其中，$\lambda>0$，$\nu>0$，当 $\nu-\dfrac{x}{\lambda}=0$ 时，因 $x=\lambda\nu$，所以 $\mu(x)=1$。如图 11-2d 所示。

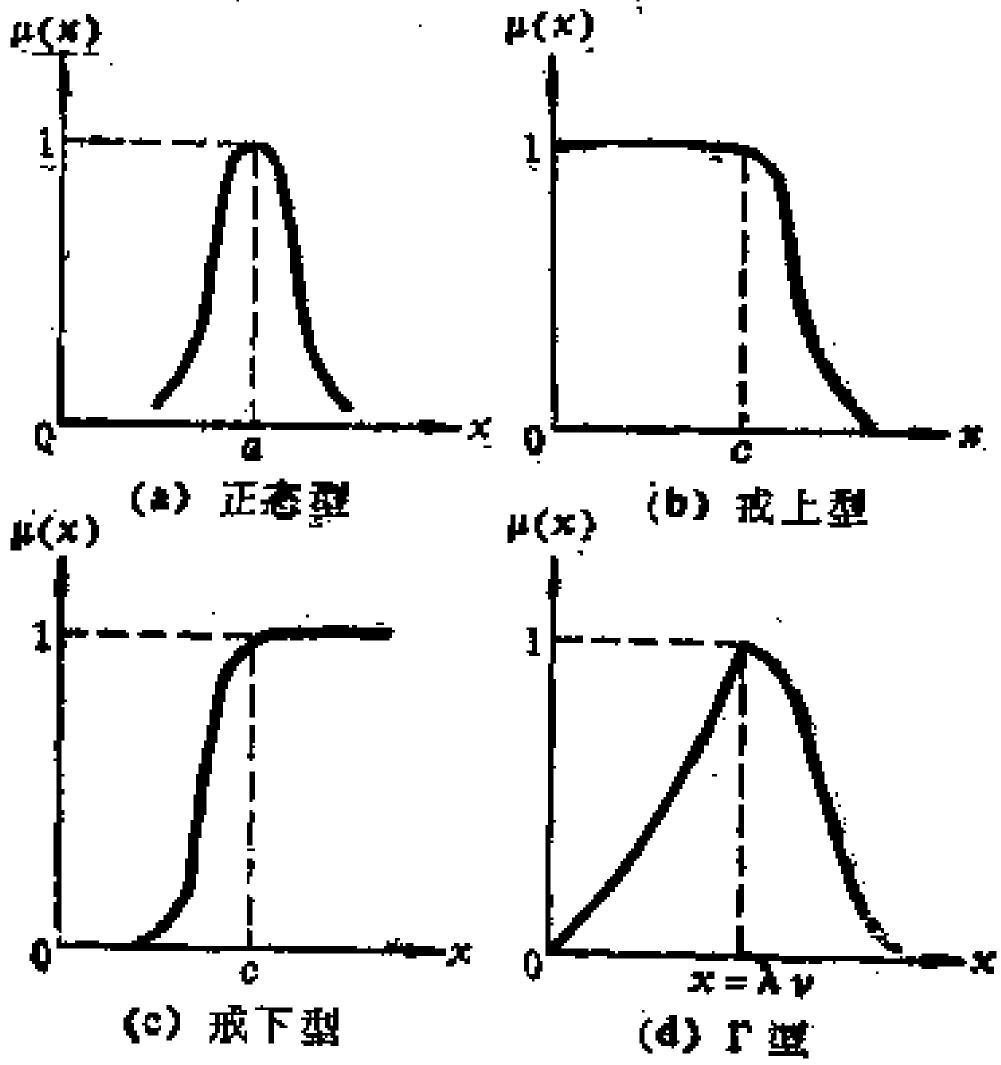


图 11-2 模糊分布

在模糊数学中，用记号$(x|\mu)$表示：当论域为U，$u\in U$时，x对$\underset{\sim}{A}$的隶属函数为μ。将$(x|\mu)$称作为"单点"，关于单点有如下公理：

任意给定集合X，对任意映射

$$f: X\to[0,1],$$

$$x\in X, x\overset{f}{\to}f(x)=\mu。$$

那么，单点的集合$\{(x|\mu)|x\in X\}$都可以看作是X的模糊子集。

这个公理称为模糊子集公理，它是模糊数学的基础。

由以上的介绍可见，隶属函数是描述模糊集合的关键。因此，确定隶属函数是十分重要的。一般说来，隶属函数的确定往往带有主观性，在很多情况下是由专家评定决定的。研究确定隶属函数的方法是模糊数学界普遍关注的问题，目前大致有例证法、统计法、蕴含解析定义法、可变模型法、相对选择法、子集比较法、滤波函数法等等。以下仅对例证法和统计法作简要说明。

例证法是1972由查德提出的，它是由已知的有限个μ_A的值来估计论域U上的模糊集$\underset{\sim}{A}$的隶属函数。例如，设论域U是全体人类，$\underset{\sim}{A}$是"高个子的人"，显然，$\underset{\sim}{A}$是U的一个模糊子集。为了确定μ_A，可以给出一个高度h。问到某人高度为h是否算"高"，回答的时候可以选用几个语言真值(就是一句话是真的程度)中的一个，如"真的"，"大致真的"、"似真又似假"、"大致假的"、"假的"。然而，将这些语言真值分别赋值1、0.75、0.5、0.25、0。如果把几个不同高度$h_1, h_2, \cdots, h_n$都作为样本进行询问，就可以得到$\underset{\sim}{A}$的隶属函数μ_A的离散表示法。

统计法是在1976年提出的，在某些情况下，隶属函数可以用统计学方法来确定，称为"模糊统计"。在统计法中，必须承认一个前提：设赞成x属于$\underset{\sim}{A}$的票的概率跟$\mu_{\underset{\sim}{A}}$成正比。模糊统计与概率统计不同，因为概率统计所研究的对象虽然是否发生不能肯定，但是一旦发生却是完全分明的事件；而模糊统计所研究的对象本身是不分明的。用统计法确定隶属函数需要作大量的实验，我国学者在

这方面作了大量工作，这些工作表明：在一定的条件下，模糊统计实验具有隶属频率稳定性，这与在概率论中频率稳定性类似。这就进一步表明，查德用隶属度来决定模糊集的思想是对客观现实的一种正确抽象。

模糊统计的基本思想可表示为：

$$\mu(u_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{N_{u_0}}{n}。$$

式中 u_0为在论域U中的一个固定元素，即$u_0\in U$；N_{u_0}为 $u_0\in A^*$的次数；A^*为某个边界可变的普通集合；$\mu(u_0)$ 为u_0对集合A^*的隶属度。上式表明，只要试验次数 n充分大，N_{u_0}与 n 之比将趋于[0, 1]区间的某个常数。

11.2.2 分解定理与扩张原则

在模糊集中有两个特殊的集特别重要，它们是联系模糊集与普通集的桥梁，这就是λ截集和支集。

设给定模糊集合$\underset{\sim}{A}$，对任意[0, 1] 闭区间中的实数λ，称普通集合 $A_\lambda=\{u|\mu_A(u)\geqslant\lambda, u\in U\}$为 $\underset{\sim}{A}$的λ水平截集。

$\underset{\sim}{A}$的λ水平截集的概念，将模糊集转化为普通集，将隶属函数转化为特征函数：

$$\chi_{A_\lambda}(u)=\begin{cases}1, & \mu_{\underset{\sim}{A}}(u)\geqslant\lambda;\\ 0, & \mu_{\underset{\sim}{A}}(u)<\lambda。\end{cases}$$

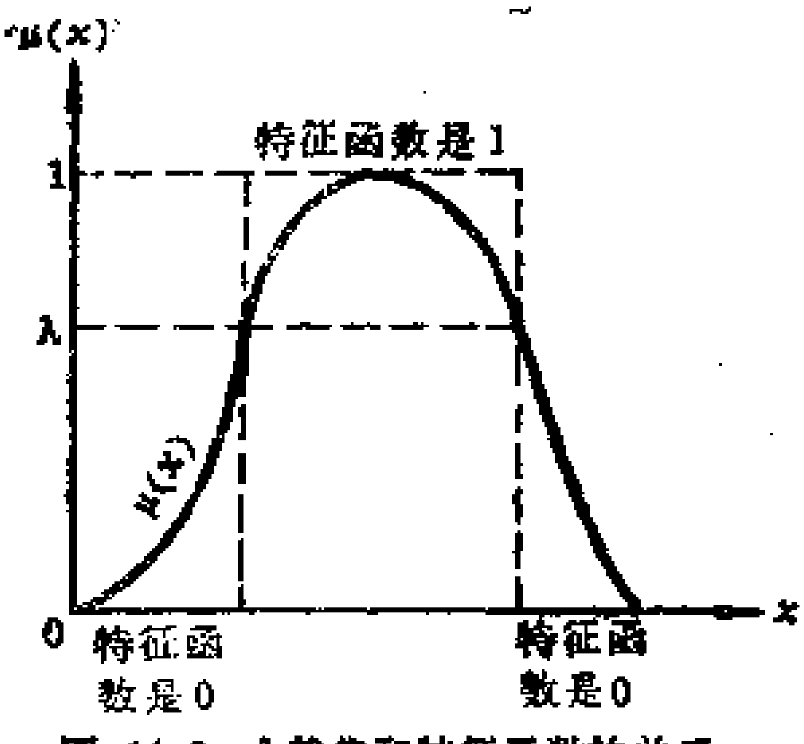


图 11-3 λ截集和特征函数的关系

λ截集和特征函数的关系如图11-3所示。

A_λ随λ的变化而变化，当λ从1变到0，A_λ从小变大；当λ从0变到1，A_λ则从大变小。如果λ取遍[0,1]所有值，就可以得到无穷多个A_λ。所有λ>0的截集的并集就叫做A的支集，用$\underset{\sim}{A}_{0^+}$表示，或记为Supp$\underset{\sim}{A}$，即

$$\text{Supp}\underset{\sim}{A}=\bigcup A_\lambda=\{u\,|\,\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)>0,u\in U\}。$$

[例11-3] 设论域为$U=\{a,b,c,d,e,f\}$，

$$\underset{\sim}{A}=\frac{1}{a}+\frac{0.3}{b}+\frac{0.6}{c}+\frac{0.9}{d}+\frac{0}{e}+\frac{0.1}{f},$$

则由λ截集和支集的定义可得：

$$A_{0.1}=\{a,b,c,d,f\},$$
$$A_{0.2}=\{a,b,c,d\},$$
$$A_{0.6}=\{a,c,d\},$$
$$A_{0.9}=\{a,d\},$$
$$A_1=\{a\}。$$
$$\text{Supp}\underset{\sim}{A}=\{a,b,c,d,f\}。$$

通常，$\underset{\sim}{A}$的支集以外的元素可以略去不写，因此$\underset{\sim}{A}$可略写为：

$$\underset{\sim}{A}=\frac{1}{a}+\frac{0.3}{b}+\frac{0.6}{c}+\frac{0.9}{d}+\frac{0.1}{f}。$$

当λ=1时，A_1称为$\underset{\sim}{A}$的核，若$A_1\neq\phi$，则称模糊子集A是"正规的"。

若将A_λ乘以λ得到λA_λ，它表示论域U上的一个子集，它的隶属函数为

$$\mu_\lambda A_\lambda=\begin{cases}\lambda & u\in A_\lambda,\\ 0 & u\notin A_\lambda。\end{cases}$$

当λ取值变化时，可以得到许多λA_λ。然后再求并。求并的规则是求隶属函数的最大值。可以证明如下重要定理[33]：

分解定理 把模糊集化为普通集求解，可表述为：给定论域U中有模糊集合$\underset{\sim}{A}$，其λ水平截集为A_λ，则$\underset{\sim}{A}$可表示为

$$\underset{\sim}{A}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_\lambda。$$

此定理的证明比较复杂，此处略去。分解定理是联系模糊数学的纽带。根据这个定理，任何模糊集合问题都可以通过取λ截集而化成普通集合的问题，再把这些λ截集并起来(以λ为加权数)就成为原来的模糊集合。

如果试图把普通集合论的方法扩展到模糊集合中去，那么可以运用如下原则[33]

扩张原则　设映射　$f: X \to Y$,

那么可以扩张成为

$$\tilde{f}: \underset{\sim}{A} \to \tilde{f}(\underset{\sim}{A}),$$

此处 $\tilde{f}$ 叫做 f 的扩张，在不致引起误解的情况下，$\tilde{f}$ 也可记为 f。

扩张原则可通俗理解为：$\underset{\sim}{A}$ 通过映射 f 映成 $f(\underset{\sim}{A})$ 时，规定它的隶属函数的值保持不变，即其隶属函数可全部传递过去。

如果映射 f 不是单值的映射，查德规定：这时的隶属函数应该取最大值。此即，若

$$f: X \to Y,$$

$$f(\underset{\sim}{A}) = \underset{\sim}{B},$$

$$x_1, x_2 \in X,$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_1) = a_1,\ \mu_{\underset{\sim}{A}}(x_2) = a_2.$$

经过映射后，x_1、x_2 对应于同一个 $y \in Y$，即

$$f(x_1) = y,$$

$$f(x_2) = y.$$

那么规定

$$\mu_{\underset{\sim}{B}}(y) = \max(a_1, a_2) = a_1 \vee a_2$$

由此可见，扩张原则是把普通的数学方法扩展到模糊数学中去。

分解定理和扩张原则是模糊数学的两个重要理论基础，它使得普通数学和模糊数学紧密地联系起来。

11.3 模糊关系和模糊系统

模糊关系或模糊系统是通常关系(可称为分明关系)或通常系

统(可称为分明系统)的拓广和发展。在像生物学、社会科学、经济学、哲学、心理学等很复杂的系统，或者定义得不分明的某些系统中，都存在着模糊关系和模糊系统。这些都是很难用准确、严密、分明的数学方法处理的软领域。既使在像通讯控制系统、模式识别系统、机器翻译、大规模信息处理、大规模电力网、神经网络、博奕等非软领域，也有由于其复杂性而难以用传统的确定性或统计数学方法处理的问题。这类问题不仅具有在概率定义下的不规则性，而且具有识别分类上的不分明性，使得这类问题的研究需要借助模糊理论。本节将对模糊关系和模糊系统的概念及特征作一简要的介绍。

11.3.1 模糊关系

在日常生活中，"关系"是最普通的名词，用来形容人与人之间、各不同事物之间的相互联系。在数学上所研究的"关系"是一个抽象的概念，它是用严密的数学语言来定义的。为了给出普通集合论中的"关系"定义，首先给出"直积"的概念。

定义11-1 设U、V是两个集合，称

$$U\times V\triangleq\{(u,v)\mid u\in U,v\in V\}$$

为集合 U与V的直积。

一般说来，$U\times V\neq V\times U$。

定义11-2 直积$U\times V$的一个子集 R称为U到V的一个二元关系。若$(u,v)\in R$，称 u对v有关系R，记作uRv；否则记为 $u\bar{R}v$。当$U=V$时，称 R是U中的二元关系。二元关系简称作关系。

例如设U表示某一群人的集合，V表示另一群人的集合，R表示父子关系，又设$u\in U$，$v\in V$，若 u 与 v 有父子关系，则记作uRv；若无父子关系，则记为$u\bar{R}v$。

关系作为直积的子集，因此关于子集的相等、包含、特征函数、交、并、余等运算的定义对于"关系"仍然适用，而不必再作规定。

和"集合"一样，"关系"也有普通关系(分明关系)和模糊关系之分。例如若 $a\in U$，$b\in V$，R 表示 U 到 V 的"兄妹关系"，则要么

aRb，要么$a\bar{R}b$，二者必居其一。但是，就“颜色”集和“好看”集的关系来说，什么颜色算好看，什么颜色不好看，其间的关系就不能绝对地区分。

定义11-3 以直积$U\times V$为论域的一个模糊子集R称为U到V的一个模糊关系。若$(u,v)\in U\times V$，称$\mu_R(u,v)$为u、v具有关系R的程度，即隶属度。$\mu_R(u,v)$也可记为$R(u,v)$。当$U=V$时，称R为U中的模糊关系。当μ_R只取0，1值时，模糊关系R退化为普通关系。

普通关系的函数可写为

$$\chi_R(u_1,v_1)=1 \qquad \text{当 } u_1Rv_1\text{时，}$$

$$\chi_R(u_2,v_2)=0 \qquad \text{当 } u_2\bar{R}v_2\text{时。}$$

当论域为n个集合的直积

$$A_1\times A_2\times A_3\times\cdots\times A_n$$

时，它所对应的为n元模糊关系R，它的隶属函数是n个变量的函数。

［例11-4］ 医学上用

体重（公斤）＝身高（厘米）－100

表示人的标准体重，这实际上给出了身高（U）和体重（V）的二元关系。设

$$U=\{140,150,160,170,180\},$$

$$V=\{40,50,60,70,80\}。$$

若某甲身高1.50米，而体重50公斤，符合上述公式，于是说某甲发育正常，符合关系R。若某乙身高2.00米，而体重60公斤，则说某乙发育不正常，不符合关系R。因此，可构成普通关系R的表如表11-1所示。

人有胖瘦不同，考虑到中介过渡状态时，应该给出“非标准”情况接近标准情况的程度。表11-2给出了身高与标准体重的模糊关系，显然这个表更全面地给出了身高与标准体重的关系。

表 11-1 身高与标准体重的普通关系

U \ μ_R \ V	40	50	60	70	80
140	1	0	0	0	0
150	0	1	0	0	0
160	0	0	1	0	0
170	0	0	0	1	0
180	0	0	0	0	1

表 11-2 身高与标准体重的模糊关系

U \ μ_R \ V	40	50	60	70	80
140	1	0.8	0.2	0.1	0
150	0.8	1	0.8	0.2	0.1
160	0.2	0.8	1	0.8	0.2
170	0.1	0.2	0.8	1	0.8
180	0	0.1	0.2	0.8	1

当U、V为有限集时，关系R可以用一个矩阵来表示。

设 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$,

$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$。

则 $U\times V=\{0,1\}$

$U\xrightarrow{R}Y$的普通关系 R 可用矩阵

$$R=(\chi_R(u_i,v_j))_{n\times m}=\begin{pmatrix}\chi_R(u_1,v_1)\cdots\chi_R(u_1,v_m)\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ \chi_R(u_n,v_1)\cdots\chi_R(u_n,v_m)\end{pmatrix}$$

来表示，式中$\chi_R(u_i,v_j)\in\{0,1\}$，$i=1、2、\cdots、n$，$j=1、2、\cdots、m$。

而模糊关系的论域为$U\times V\to[0,1]$，，模糊关系：$\underset{\sim}{R}$ 为 $U\overset{R}{\to}V$ 可用矩阵

$$\underset{\sim}{R}=(\mu_R(u_i,v_t))_{n\times m}=\begin{pmatrix}\mu_{\underset{\sim}{R}}(u_1,v_1) & \cdots & \mu_R(u_1,v_m)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \mu_{\underset{\sim}{R}}(u_n,v_m) & \cdots & \mu_R(u_n,v_m)\end{pmatrix}$$

来表示。$\underset{\sim}{R}$称为模糊矩阵。在例11-4中的模糊矩阵为：

$$\underset{\sim}{R}=\begin{pmatrix}1 & 0.8 & 0.2 & 0.1 & 0\\ 0.8 & 1 & 0.8 & 0.2 & 0.1\\ 0.2 & 0.8 & 1 & 0.8 & 0.2\\ 0.1 & 0.2 & 0.8 & 1 & 0.8\\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.8 & 1\end{pmatrix}。$$

当模糊矩阵中的元素只取 0 或 1 值时，模糊矩阵便退化为布尔矩阵，它对应于普通的二元关系。利用模糊矩阵使得模糊关系的分析更为方便。与普通的矩阵一样，模糊矩阵也有许多运算规则。例如相等、包含、和、直积、余模糊矩阵、矩阵积、转置模糊矩阵等等。这些运算规则大多数与普通运算矩阵的规则不同。

设两个模糊矩阵$A=[a_{ij}]$，$B=[b_{ij}]$，则

$$c_{ij}=\max[a_{ij},b_{ij}]\triangleq a_{ij}\vee b_{ij}$$

为分量的模糊矩阵C称为A与B的和，记为$C=A\oplus B$。

对于A、B的积矩阵$D=(d_{ij})$定义为

$$d_{ij}=\max_k\min[a_{ik},\ b_{kj}]\triangleq\bigvee_k[a_{ik}\wedge b_{kj}],$$

记为 $D=A\cdot B$。

［例11-5］ 设

$$A=\begin{bmatrix}0.8 & 0.7\\0.5 & 0.3\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}0.2 & 0.4\\0.6 & 0.9\end{bmatrix},$$

则

$$A\circ B=\begin{bmatrix}(0.8\wedge 0.2)\vee(0.7\wedge 0.6) & (0.8\wedge 0.4)\vee(0.7\wedge 0.9)\\(0.5\wedge 0.2)\vee(0.3\wedge 0.6) & (0.5\wedge 0.4)\vee(0.3\wedge 0.9)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.6 & 0.7\\0.3 & 0.4\end{bmatrix}。$$

同理可得，

$$B\circ A=\begin{bmatrix}0.4 & 0.3\\0.6 & 0.6\end{bmatrix}。$$

因此，$A\circ B\neq B\circ A$。

模糊矩阵中有三个最基本的矩阵 I、O、E。

单位模糊矩阵

$$I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

零模糊矩阵

$$O=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

全称模糊矩阵

$$E=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}。$$

普通关系可以用关系图来表示，它们是图论的研究对象。同样，模糊关系也可以用“模糊图”来表示，它们是“模糊图论”的研究对象。模糊图论已被应用到许多领域。在模糊关系的基础上，还可以建立模糊关系方程，它可以写成模糊矩阵方程的形式，这些十

分有趣的内容可参考文献[31,35]。

11.3.2 模糊系统

所谓模糊系统是指输入、输出、状态都具有模糊性的系统。例如，假定某人的状态是“严重感冒”作为输入是“吃了好药”。那么作为输出就是“热度稍有下降”。而下一个状态就是“感冒稍见好转”。显然，这些输入、输出和状态都是模糊的，所以可把“某人”看作模糊系统。

为了用数学方法描述模糊系统，首先考虑非确定性系统 S 的描述方法。设 u_t, y_t 及 x_t 分别表示在时刻 t 的输入、输出和状态。对于确定性系统，$t+1$ 时刻的状态 x_{t+1} 和输出 y_t 完全由前一时刻的状态 x_t 和输入 u_t 来决定。但是对于非确定性系统，当 x_t 和 u_t 给定时，x_{t+1} 和 y_t 可以取几个值中的一个值，将 x_{t+1} 和 y_t 的取值集合分别记为 X^{t+1} 和 Y^t，系统 S 可表示为

$$X^{t+1}=F(x_t,u_t),$$

$$Y^t=G(x_t,u_t)。$$

此处函数 F、G 分别为

$$F: \quad X\times U\to 2^X,$$

$$G: \quad X\times U\to 2^Y。$$

X、U、Y 分别为状态空间、输入空间和输出空间。2^X 称为 X 的幂集合，表示 X 的全部子集。例如当 $X^{t+1}=\{\alpha,\beta,\gamma\}\subseteq X$，则当 x_t, u_t 给定时，下一个状态 x_{t+1} 可以取 α、β、γ 中的某一个值。

如果对上述非确定性系统作进一步的推广，即假定 X^{t+1} 及 Y^t 不仅是论域 X 和 Y 中的子集，而且还是模糊集，那么此时的系统 S 就称为模糊系统。上述方程可以看成是模糊系统的状态空间描述。

对于模糊集 X^{t+1}、Y^t 也可用隶属函数来描写，设当 x_t、u_t 给定时，表示模糊集 X^{t+1}、Y^t 特征的隶属函数分别为

$$\mu_X(x_{t+1}|x_t,u_t)、\mu_Y(y_t|x_t,u_t)。$$

因此，模糊系统也可以用上述二个隶属函数来表示其特征。

与普通系统一样，模糊系统也可分为有记忆模糊系统和无记忆模糊系统，对于无记忆的模糊系统，其模糊集Y^t不依赖于状态x_t，即Y^t是用隶属函数

$$\mu_Y(Y_t|t_t)$$

来表示其特征。可用方程

$$Y^t=G(u_t)$$

来表示输出方程。其中G是从U到Y中模糊集族的映射。

例[11-6] 设 $X=R^3$，则具有如下性质的系统为模糊系统，即"在时刻 t 的状态为$x_t=3,5,1$时，加上输入 $u_t=5$以后，下一时刻$t+1$的状态在点 $\alpha=7,3,5$ 附近"，具有这种特征的系统为模糊系统。点 α附近的点的集合为 X 中的模糊集，也可用隶属函数来表示其特征。例如选

$$\mu(x)=\exp\left(-\frac{1}{k}\|X-\alpha\|\right)$$

为其隶属函数。其中 $x\in X$，$\|X-\alpha\|$是向量 $x-\alpha$的模，k 是正的常数。

11.4 模糊语言和近似推理

每一种控制系统的设计都有特定的"语言"和推理方法，在确定性系统中，采用的是确定性数学语言和方法，在随机系统中，采用的是统计数学语言和方法。在模糊系统的分析和控制中，将要采用模糊语言和近似推理等模糊数学的理论和方法。

11.4.1 模糊语言

语言是一种符号系统。人们日常生活中所用的语言称做"自然语言"，它用字或词作为符号，按照一定的规则排列，就可以构成句子，表达人们的思想。这些句子有时具有模糊性或多义性。由于人脑思维的特性，对于这些句子不仅能很快理解，还会产生美感和幽默感，例如在读诗句时，人们会感到舒适和兴奋。

但是，要让计算机理解人类的自然语言就很困难，通常使用一

些符号和法则来编制“计算机语言”，这种语言是不允许有模糊性和多义性，只是一种形式上的语言，被称为“形式语言”。只能按照“形式语言”工作的计算机是不具有“灵活性”的，它不能模拟人脑的思维和智能，不适合在具有“模糊性”的控制系统中使用。因此，使自然语言直接进入计算机程序，在形式语言中渗入自然语言是使计算机具有“灵活性”的关键。这种渗入了自然语言的形式语言称为模糊语言。它是语言学和数学结合的产物，是模糊控制所采用的基本语言。

在模糊控制中，控制规则一般是以模糊条件语言的形式出现。所谓模糊条件语句是指“如果……，那末……”，“若……则……，否则……”型的语言。例如：“如果温度升高，那么铁将发红。”“如果 x 轻则 y 重，否则 y 不很重”等等。

设系统的输入是论域 U 上的模糊集 $\underset{\sim}{A}$，输出是论域 Y 上的模糊集 $\underset{\sim}{B}$，则 $\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$ 间的函数关系为“若 $\underset{\sim}{A}$ 则 $\underset{\sim}{B}$”形式的条件语句。它可以表示为 $\underset{\sim}{R}=\underset{\sim}{A}^T\times\underset{\sim}{B}$，其中 $\underset{\sim}{A}^T$ 为输入列向量。

设输入论域 $U=\{u_1,u_2,u_3\}$，$u_1<u_2<u_3$。$\underset{\sim}{A}$ 是 U 上的模糊子集，它表示“小”：

$$\underset{\sim}{A}=\frac{1}{u_1}+\frac{0.3}{u_2}+\frac{0}{u_3}。$$

由上述关系可见，对 u_1 的隶属度最大，对 u_3 的隶属度为0，这正反映了“小”。

又设输出论域 $V=\{v_1,v_2,v_3\}$ $v_1<v_2<v_3$。$\underset{\sim}{B}$ 是 V 上的模糊子集，它表示“大”。

$$\underset{\sim}{B}=\frac{0}{v_1}+\frac{0.5}{v_2}+\frac{1}{v_3}。$$

那么 $\underset{\sim}{A}$ 和 $\underset{\sim}{B}$ 间关系 R 的隶属函数为

$$\mu_R(u_i,v_j)=\mu_{\underset{\sim}{A}}(u_i)\wedge\mu_{\underset{\sim}{B}}(v_j),$$
$$i=1,2,3,\quad j=1,2,3\ 。$$

以上“$\wedge$”表示最小值运算。

模糊关系矩阵 $\underset{\sim}{R}$ 可表示为：

$$R = A^T \times B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.3 \\ 0 \end{pmatrix} [0 \quad 0.5 \quad 1]$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}。$$

利用模糊关系矩阵 R，对任一模糊输入 A' 就可以通过合成运算（积运算）得到模糊输出 B'，即

$$B' = A' \circ R \tag{11-1}$$

例如对上例中

$$A \circ R = (1 \quad 0.3 \quad 0) \circ \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= [(1 \wedge 0) \vee (0.3 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \quad (1 \wedge 0.5) \vee (0.3 \wedge 0.3) \vee (0 \wedge 0) \quad (1 \wedge 1) \vee (0.3 \wedge 0.3) \vee (0 \wedge 0)]$$

$$= [(0 \vee 0 \vee 0) \quad (0.5 \vee 0.3 \vee 0) \quad (1 \vee 0.3 \vee 0)]$$

$$= [0 \quad 0.5 \quad 1] = B。$$

式 11-1 可以看成是模糊系统的传递函数描述方法，如图 11-4 所示。



图 11-4　模糊系统

对于形如："若 A 则 B 否则 C" 的条件语句可表示为模糊关系 R，

$$R = (A \times B) \cup (\bar{A} \times C)。$$

在模糊控制中经常遇到多段条件语句，例如："若 A_1 则 B_1。若 A_2 则 B_2，……，若 A_n 则 B_n" 其中 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为论域 U 的模糊子集，$B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为论域 V 的模糊子集。多段条件语句可以用 U 到 V 的一个模糊关系 R 来表示。

$$R = (A_1 \times B_1) \cup (A_1 \times B_2) \cup \cdots \cup A_n \times B_n),$$

其隶属函数为

$$\mu_{\underset{\sim}{R}}(u,v)=(\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(u)\wedge\mu_{\underset{\sim}{B}_1}(v))\vee\cdots\vee(\mu_{\underset{\sim}{A}_n}(u)\wedge\mu_{\underset{\sim}{B}_n}(v))。$$

其中数符"∧"表示取最小值运算，"∨"表示取最大值运算。

11.4.2 近似推理

经典的二值逻辑是人们传统推理思维的基础。这种推理只有二种结果："真"或"假"。这种精确推理的常用形式是所谓"三段论法"。但是在很多情况下，很难绝对判断一个命题的"真"或"假"。例如：

A：今年气候反常。

B：他能力强。

C：王强身体健康。

这里的"反常"、"强"、"健康"都是模糊概念。将这种含有模糊概念的陈述句称作"模糊命题"，它不取绝对的真、假，不符合二值逻辑，而是取[0,1]之间的一个实数来表示它的真值，因此，它是需要用多值逻辑来描述的。模糊命题也将用英文字母下加符号～来表示，例如$\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}$，$\underset{\sim}{C}$。

模糊命题对真值也就是隶属函数，真值的运算就是隶属函数的运算。设 $\underset{\sim}{A}$的真值是 λ_1，$\underset{\sim}{B}$ 的真值是 λ_2，那么

$\underset{\sim}{A}\vee\underset{\sim}{B}$的真值是 $\lambda_1\vee\lambda_2\triangleq\max(\lambda_1,\lambda_2)$；

$\underset{\sim}{A}\wedge\underset{\sim}{B}$的真值是$\lambda_1\wedge\lambda_2\triangleq\min(\lambda_1,\lambda_2)$；

$\bar{\underset{\sim}{A}}$的真值是 $1-\lambda_1$。

模糊命题比二值逻辑中的命题更接近于人脑的思维，它是模糊逻辑的基础。模糊逻辑与二值逻辑的不同之处，不仅在于命题不是取绝对的真假值，还在于逻辑推理的"似然"性，即推理具有不是很确切的特性。这种近似（或称"似然"）推理的方法，在医疗诊断、侦察破案、天气预报、管理预测等决策问题中都被广泛运用。

应用模糊集合理论，可以对近似推理问题作定量的分析。近似推理问题的提法如下：

已知蕴涵关系"若$\underset{\sim}{A}$则$\underset{\sim}{B}$"、$\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}(U)$、$\underset{\sim}{B}\in\mathscr{F}(V)$，若又知与$\underset{\sim}{A}$

接近的$\underset{\sim}{A}^*\in\mathscr{F}(U)$ 问从蕴涵关系能推断出什么结论$\underset{\sim}{B}^*$?一般说来，$\underset{\sim}{B}^*\in\mathscr{F}(V)$。

蕴涵关系"若$\underset{\sim}{A}$则$\underset{\sim}{B}$"记作$\underset{\sim}{A}\to\underset{\sim}{B}$，命题"$\underset{\sim}{A}\to\underset{\sim}{B}$"往往是大量的实验、观测和经验的概括，因此，总可认为它提供的全部信息都是可靠的，这是作近似推理的出发点。

在二值逻辑中"$A\to B$"的真值表见表11-3。

表11-3 $A\to B$的真值表

$A\in U$	$B\in V$	$A\to B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	0

因为"$A\to B$"的真值表和"$\bar{A}\vee B$"的真值表相同，故有公式

$$A\to B=\bar{A}\vee B$$

若$\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}$都是模糊命题，则$\underset{\sim}{A}\to\underset{\sim}{B}$是一个模糊蕴涵关系。如果把$A\to B=\bar{A}\vee B$推广到模糊情况，则有

$$\underset{\sim}{A}\to\underset{\sim}{B}=\bar{\underset{\sim}{A}}\vee\underset{\sim}{B}。$$

关于 $(A\wedge B)\vee(1-A)$的真值表(见表11-4)还可看出：

$$A\to B=(A\wedge B)\vee(1-A)。$$

表 11-4 $(A\wedge B)\vee(1-A)$的真值表

$A\in U$	$B\in V$	$(A\wedge B)\vee(1-A)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	0

若将上述关系也推广到模糊情况可得：

设$\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}(U)$, $\underset{\sim}{B}\in\mathscr{F}(V)$，模糊蕴涵"若$\underset{\sim}{A}$则$\underset{\sim}{B}$"可以定义成$U$

到V上的一个模糊关系$\underset{\sim}{R}$：

$$\underset{\sim}{R} \hat{=} (\underset{\sim}{A} \to \underset{\sim}{B}),$$

$\underset{\sim}{R}(u,v) \hat{=} (\underset{\sim}{A}(u) \wedge \underset{\sim}{B}(v)) \vee (1-\underset{\sim}{A}(u)),$

$u \in U, v \in V$。

给定了一个模糊关系 R，就决定了一个模糊变换。所以可有如下推理规则：

模糊取式(Fuzzy modus ponens，简记FMP)

给定$\underset{\sim}{A}^* \in \mathscr{F}(U)$（小前提），则结论为$\underset{\sim}{B}^* \in \mathscr{F}(V)$：

$$\underset{\sim}{B}^* = \underset{\sim}{A}^* \circ \underset{\sim}{R},$$

即 $\forall v \in V$。

$$\underset{\sim}{B}^*(v) = \underset{\sim}{A}^*(u) \circ \underset{\sim}{R}(u,v)$$
$$= \sup_{u \in U} \{\underset{\sim}{A}^*(u) \wedge [(\underset{\sim}{A}(u) \wedge \underset{\sim}{B}(v)) \vee (1-\underset{\sim}{A}(u))]\}。$$

模糊拒取式(Fuzzy modus tollens，简记FMT)

给定$\underset{\sim}{B}^* \in \mathscr{F}(V)$（小前提），则结论为$\underset{\sim}{A}^* \in \mathscr{F}(U)$：

$$\underset{\sim}{A}^* = \underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{B}^*,$$

即$\forall u \in U$。

$$\underset{\sim}{A}^*(u) = \underset{\sim}{R}(u,v) \circ \underset{\sim}{B}^*(v)$$
$$= \sup_{v \in V} \{[(A(u) \wedge B(v)) \wedge (1-A(u))] \wedge B^*(v)\}。$$

[例11-7] 设 $\underset{\sim}{A}$：u小，

$\underset{\sim}{B}$：v大。

$\underset{\sim}{A} \to \underset{\sim}{B}$即“若 x 小则 y 大”。先选择论域：

设 $U=V=\{1,2,3,4,5\}$，“大”，“小”都是论域上的模糊子集。

设，“小”(u) $= \frac{1}{1} + \frac{0.5}{2}$，

“大”(v) $= \frac{0.5}{4} + \frac{1}{5}$。

根据上述公式计算：

“若 u 小则 v 大”(u,v)

$=$[“小”(u) $\wedge$ “大”(v)] $\vee$ [(1 $-$ “小”(u)]。

分别把 $u=1,2,3,4,5$

$v=1,2,3,4,5$

代入，例如 $u=1, v=4$ 时得：

$$\text{“若 } u \text{ 小则 } v \text{ 大”}(1,4)=(1\wedge 0.5)\vee(1-1)$$
$$=0.5\vee 0$$
$$=0.5。$$

类似可算出如表11-5所列。

表 11-5

$\underset{\sim}{A}\to\underset{\sim}{B}$ ($\underset{\sim}{A}$ \ $\underset{\sim}{B}$)	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0.5	1
2	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
3	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1

由此决定一个模糊矩阵 $\underset{\sim}{R}$，

$$\underset{\sim}{R}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}。$$

这个模糊矩阵就表示了“若 u 小则 v 大”的模糊关系。有了这个关系就可以进行如下近似推理：

“若 u 小则 v 大”，

“已知 u 较小”，

"问 v 如何?"。

设论域 $U=V=\{1,2,3,4,5\}$，再设

$$\text{"较小"}\quad (u)=\frac{1}{1}+\frac{0.4}{2}+\frac{0.2}{3},$$

将其写为向量形式，并记为 $\underset{\sim}{A}^*$，

$$\underset{\sim}{A}^*=(1\quad 0.4\quad 0.2\quad 0\quad 0)。$$

利用上述模糊取式(FMP)推理方法可得输出 $\underset{\sim}{B}^*$，

$$\underset{\sim}{B}^*=\underset{\sim}{A}^*\circ \underset{\sim}{R}$$

$$=(1\ 0.4\ 0.2\ 0\ 0)\begin{pmatrix}0&0&0&0.5&1\\0.5&0.5&0.5&0.5&0.5\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$=(0.4\quad 0.4\quad 0.4\quad 0.5\quad 1),$$

即 $\underset{\sim}{B}^*=\frac{0.4}{1}+\frac{0.4}{2}+\frac{0.4}{3}+\frac{0.5}{4}+\frac{1}{5}$。

$\underset{\sim}{B}^*$可理解为"多少有些大"，这基本符合通常的思维习惯。

11.5 模糊控制器

正如引言中所述，模糊控制的对象具有一些基本的特点：控制对象往往不能以确切的数学模型表示，即其结构参数或不知道或不清楚。对于这类被控过程往往具有大量的以定性的形式得到的先验信息，以及仅仅是语言上规定的性能指标；过程的操纵人员是系统的基本组成部分等等。所有这些特点都是一种不精确性、不分明性。对于这类系统如用基于精确数学的控制方法则难以得到满意的效果，但由人来实现控制却往往容易达到较好的效果，因为人可以凭借实践经验，随机应变，采取适当的对策来完成控制任务。因此，把人的控制经验归纳成为用定性描述的一组条件语句，然后利用模糊集理论将它定量化，使控制器能根据人的经验、模仿人的控制策略，这就是模糊控制器。这种控制器与维纳所建立的

信息反馈式的控制器在基本原理上是有所不同的，这种新型的控制器是模糊数学与控制论结合的产物，是对传统控制器的发展。

11.5.1 模糊控制器原理

模糊控制器主要是将控制者的经验加以整理与处理，归纳成一组模糊条件语句，再由模糊数学工具加以数量化，用模糊逻辑、模糊语言给出模糊算法，使得模糊控制器能够模仿人的操作策略，使计算机能接受模糊算法语言给出的控制指令，实现对系统的控制。这种控制器的设计通常可以归纳为以下三个方面：

(1) 把各种语言变量化为在某个论域上的模糊子集。一般是通过计算现时的误差及误差变化(或误差变化率)，并将误差及误差变化分类定级，给出在各种组合情况下的隶属度，使各种变量模糊化。

例如，设 A 表示语言变量"误差"。将误差(正、负)分成若干等级，比如分成 14 级，分别由代号(−6, −5, −4, −3, −2, −1, −0, +0, +1, +2, +3, +4, +5, +6)组成。这些代号就构成了"误差"语言变量的论域，记为 X，

$X=\{-6,-5,-4,-3,-2,-1,-0,+0,+1,+2,+3,+4,+5,+6\}$。然后，将 $\underset{\sim}{A}$ 的取值分为 8 种类型，即 $A_1, A_2, \cdots, A_8$。它们分别对应以下 8 种含义：

正大 (PB)，正中(PM)，正小(PS)，正0(P0)，

负0(N0)，负小(NS)，负中(NM)，负大(NB)。

有时把"负0"，"正0"合并为"零"。

如果给出了这 8 个语言取值的隶属度，那么就分别定义了 X 中的 8 个模糊子集 $\underset{\sim}{A}_i (i=1, \cdots, 8)$，这样就完成了语言变量"误差"的模糊化，可用表格形式表示。如表 11-6 所示，给出了"误差"的隶属度。

若用 B 表示"误差变化率"（现时误差与上次误差之差除以采样间隔)的语言变量。C 表示"控制量"的语言变量。

表 11.6 "误差"变量的隶属度

隶属度 等级 / 变量	-6	-5	-4	-3	-2	-1	-0	+0	+1	+2	+3	+4	+5	+6
A_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1	0.4	0.8	1
A_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.2	0.7	1	0.7	0.2
A_3	0	0	0	0	0	0	0	0.5	0.8	1	0.5	0.1	0	0
A_4	0	0	0	0	0	0	0	1	0.5	0.1	0	0	0	0
A_5	0	0	0	0	0.2	0.6	1	0	0	0	0	0	0	0
A_6	0	0	0.1	0.5	1	0.8	0	0	0	0	0	0	0	0
A_7	0.2	0.7	1	0.7	0.2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A_8	1	0.8	0.4	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

仿照上面方法，可以先分等级，然后设定其论域 Y 和 U。在确定论域之后，选取 B 或 C 的若干个语言值，（可选正大到负大中的若干个值），并用表格形式给出取这些语言值的隶属度，这样就可以将"误差变化率"的语言变量和"控制量"的语言变量模糊化，用相应论域上的模糊子集表示。若设 B 和 C 都取 7 个语言值表示，可得模糊集 $\underset{\sim}{B}_i$ 和 $\underset{\sim}{C}_i$ $(i=1,2,\cdots,7)$。

（2）设计模糊控制算法，计算出模糊控制量。模糊控制算法通常是应用模糊条件语句或近似推理（似然推理）来表述。例如：

若 $\underset{\sim}{P}$ 则 $\underset{\sim}{Q}$ （if…, then…）

若 $\underset{\sim}{P}$ 或 $\underset{\sim}{Q}$ 则 $\underset{\sim}{S}$ （if…or…, then…）

若 $\underset{\sim}{A}$ 则 $\underset{\sim}{B}$，否则 $\underset{\sim}{C}$（if…or…, else…）

若 $\underset{\sim}{A}_i$ 且 $\underset{\sim}{B}_j$ 则 $\underset{\sim}{C}_k$ （if…and…, then…）

等等。每一条语句都对应一个模糊关系，例如上述最后一条语句所对应的关系 $\underset{\sim}{R}_i$ 为

$$\underset{\sim}{R}_i = \underset{\sim}{A}_i \times \underset{\sim}{B}_j \times \underset{\sim}{C}_k$$

于是总的模糊关系为

$$R=\bigcup_i R_i$$

通过每一条规则可推算出控制量 C_i,则总的控制量为

$$C=\bigcup_i C_i$$

C 是一个模糊集。

(3) 模糊判决方法的设计。一般的控制方式如图 11-5 所示。



图 11-5 模糊控制器

模糊控制器可以看成是一个模糊关系 $\underset{\sim}{R}$, $\underset{\sim}{R}$ 是输入和输出之间的一个模糊传递函数。模糊控制器的输出是一个模糊集，它包含了控制量的各种信息,如果被控系统只能接受一个控制量,那么就需要从输出的模糊子集中选出一个控制量作用到被控对象上去,也就是设计一个由模糊集到普通集合的映射,这个映射称之为判决。

模糊判决的方法很多,主要有三种:

1) 最大隶属度原则。

模糊控制器输出的模糊集中，取隶属度最大的那个论域元素 u^* 作为控制器的判决输出。例如若输出集由如下查德记号表示:

$$\underset{\sim}{u}=\frac{0}{-6}+\frac{0}{-5}+\frac{0.1}{-4}+\frac{0.2}{-3}+\frac{0}{-2}+\frac{0}{-1}+\frac{0}{0}+\frac{0.5}{+1}$$
$$+\frac{0.4}{+2}+\frac{0.5}{+3}+\frac{0.6}{+4}+\frac{1}{+5}+\frac{0.5}{+6},$$

则取隶属度最大的那个元素 +5 作为判决输出。

当输出模糊集中,具有最大隶属度的那些元素是连接时(即隶属函数出现一个平顶),则取其平顶中点所对应的论域元素为判决输出。

2) 中位数判决。

在最大隶属判决中，只考虑主要信息，其他次要信息全部抛弃，因此缺乏全面考虑。为此可采用中位数判决，即将隶属函数曲线与横坐标所围成的面积平均分成两部分，所对应论域元素 u^* 作为输出判决。

这种判决方法能概括更多的信息，但主要信息没有突出。

3）加权平均判决。

这种方法的关键是加权系数的选取，它可以根据系统的设计要求或经验来选取。若选用隶属度为加权系数，则加权平均判决输出为：

$$u^* = \frac{\sum_i \mu(u_i) \times u_i}{\sum_i \mu(u_i)}。$$

例如在上面例子中若采用加权平均可得：

$$u^* = \frac{12.2}{3.8} = 3.21。$$

在实际问题中，要根据具体情况选择一种适当的判决方法，每一种方法都有各自的优缺点，不能一概而论。

以上介绍的模糊控制器的一般原理，其设计的步骤可用图11-6的框图表示。

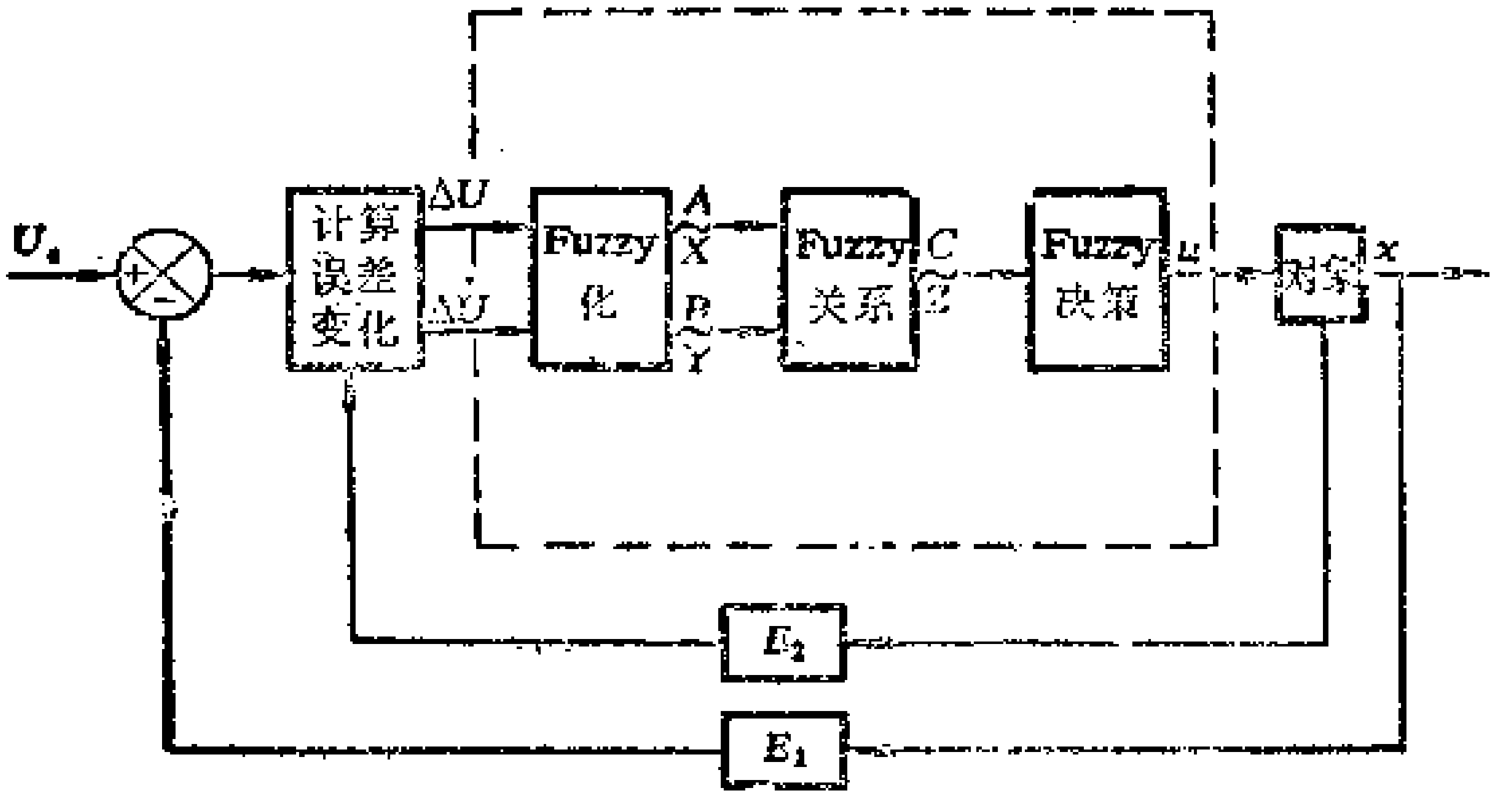


图 11-6 模糊控制器设计原理

其中 U_0为设定值；ΔU 为偏差；$\Delta U = x - U_0$；$\Delta\dot{U}$ 为误差变化率；$\Delta\dot{U} = \dot{x}E_2$；$E_1$ 为反馈系数；E_2为误差变化率比例系数；$\underset{\sim}{A}$为 ΔU 经模糊化处理后，论域为X的模糊集；$\underset{\sim}{B}$ 为 $\Delta\dot{U}$ 经模糊化处理后，论域为 Y的模糊集；$\underset{\sim}{C}$ 为控制量，论域为 U 的模糊集；u 为经模糊判决后所得的确切控制量。

模糊控制器的设计方法目前还不成熟，许多问题还有待于进一步的探讨，这也是目前国内外自动控制和模糊数学界共同关注的问题。

11.5.2 模糊控制应用举例

为了能对模糊控制有比较具体的了解，以下将举几个典型的例子。

11.5.2.1 关于水位的模糊控制[33]

设有一贮水器，具有可变的水位，通过调节阀门可以向内注水或向外抽水，试设计一个模糊控制器，并通过调节阀将水位稳定在固定点(设为 0 点)附近。

如果对水位变化原因不能精确掌握，人往往是凭经验去控制水位，这些经验可以归结为一些用语言描述的规则。例如，

"若水位高于 0 点，则排水，差值越大，排水越快。"

"若水位低于 0 点，则向内注水，差值越大，注入越快。"

根据以上经验，可以按以下步骤设计模糊控制器。

(1) 确定观测量和控制量并将其模糊化。

观测量是水位对 0 点的偏差 e，偏差量可根据水位变化范围作适当划分，并以代号 $-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3$来表示。由此给出了偏差变量的论域。

$$X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}。$$

设偏差变量 e 在论域X中有 5 个语言取值：

$$\mathrm{PB}_e, \mathrm{PS}_e, 0_e, \mathrm{NS}_e, \mathrm{NB}_e,$$

分别表示：正大，正小，零，负小，负大。为了将偏差变量模糊化需要给出取上述值的隶属度，见表11-7。

表 11-7　偏差量的隶属度

隶属度＼等级 变量	−3	−2	−1	0	+1	+2	+3
PB_e	0	0	0	0	0	0.5	1
PS_e	0	0	0	0	1	0.5	0
0_e	0	0	0.5	1	0.5	0	0
NS_e	0	0.5	1	0	0	0	0
NB_e	1	0.5	0	0	0	0	0

控制量是阀门转盘角度的变化 u，逆时针旋转为正（注水），顺时针旋转为负（排水）。设阀门角度变化分为 9 档。用代号 −4，−3，−2，−1，0，+1，+2，+3，+4表示，因此，控制量的论域为

$$U=\{-4,-3,-2,-1,0,+1,+2,+3,+4\}。$$

将控制量的语言取值也分 5 级，即：

$$PB_u、PS_u、0_u、NS_u、NB_u。$$

其含义分别为：正大、正小，零，负小，负大。同样给出取这些值的隶属度如表 11-8 所示。

表11-8 控制量的隶属度

隶属度＼等级 变量	−4	−3	−2	−1	0	+1	+2	+3	+4
PB_u	0	0	0	0	0	0	0	0.5	1
PS_u	0	0	0	0	0	0.5	1	0.5	0
0_u	0	0	0	0.5	1	0.5	0	0	0
NS_u	0	0.5	1	0.5	0	0	0	0	0
NB_u	1	0.5	0	0	0	0	0	0	0

（2）模糊控制算法的设计。也就是要给出模糊条件语句，或近似推理。按照人们的经验，给出如下规则：

"若 e 负大，则 u 正大"，
"若 e 负小，则 u 正小"，
"若 e 为0，则 u 为0"，
"若 e 正小，则 u 负小"，
"若 e 正大，则 u 负大"。

并列入表11-9中。

表 11-9

若(if)	NB_e	NS_e	0_e	PS_e	PB_e
则(then)	PB_u	PS_u	0_u	NS_u	NB_u

上述语言控制规则是一个多级条件语句，它可以表示为$X\times U$的一个模糊子集，即模糊关系 $\underset{\sim}{R}$。

$$\underset{\sim}{R} = (NB_e\times PB_u)\cup(NS_e\times PS_u)\cup(0_e\times 0_u)\cup(PS_e\times NS_u)\cup(PB_e\times NB_u)$$

其中，

$$NB_e\times PB_u=\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0.5&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0.5&0.5\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix},$$

$$NS_e\times PS_u=\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0.5&0.5&0.5&0\\ 0&0&0&0&0&0.5&1&0.5&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix},$$

$$0_e \times 0_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$PS_e \times NS_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$PB_e \times NB_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

由以上五个矩阵求并(即求隶属函数之最大值)则得：

$$\underset{\sim}{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

(3) 模糊判决。也就是要选择一个适当的控制量作用到阀门

上去。由以上的推导已求得了模糊关系矩阵，根据近似推理的方法(FMP)，任给一个观测结果$\underset{\sim}{e}$作为输入，可得输出，

$$\underset{\sim}{u}=\underset{\sim}{e}\circ\underset{\sim}{R},$$

输出$\underset{\sim}{u}$也称为模糊响应。

例如：设 $\underset{\sim}{e}=NB_e=(1,0.5,0,0,0,0,0)$

则可求得：

$$\underset{\sim}{u}=\underset{\sim}{e}\circ\underset{\sim}{R}=(0,0,0,0,0,0.5,0.5,0.5,1)。$$

用查德记号表示为：

$$\underset{\sim}{u}=\frac{0}{-4}+\frac{0}{-3}+\frac{0}{-2}+\frac{0}{-1}+\frac{0}{0}+\frac{0.5}{1}+\frac{0.5}{2}$$
$$+\frac{0.5}{3}+\frac{1}{4}。$$

由此可见，“4”的隶属度最大。根据“最大隶属度原则”可选控制量为“4”级。这种情况称为确切响应。

若 $$\underset{\sim}{e}=(0,1,0,0,0,0,0),$$

则 $$\underset{\sim}{u}=\underset{\sim}{e}\circ\underset{\sim}{R}$$
$$=(0,0,0,0,0,0.5,0.5,0.5,0.5)。$$

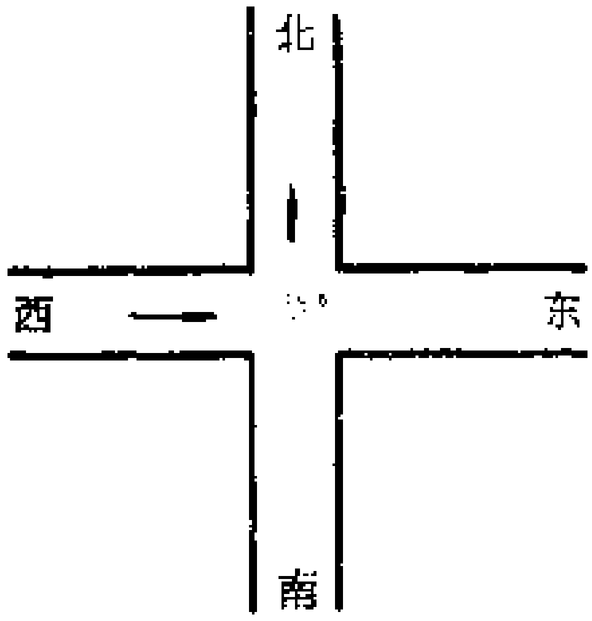
此时，取最大隶属度的元素是邻接的，则取其中点所对应的论域元素为判决输出。在上述情况中，$\underset{\sim}{u}$的峰域(最大隶属度的对应域)为{1,2,3,4}四级，中心值在2.5。若峰域包括论域中的各个元素，但彼此不相邻，则无法得到确切响应。此时称模糊控制器对观测结果$\underset{\sim}{e}$是不可响应的。

对所有非模糊观测结果作成响应表，它就是最终采用的控制表。

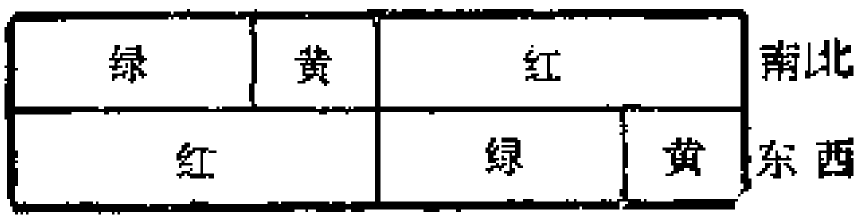
11.5.2.2　十字交通的模糊控制

道路的交通控制主要是利用十字交叉口的红绿灯信号实现的。红灯停止，绿灯通行，黄灯准备。红绿灯信号的确定受到许多因素的影响，很难用精确的数学语言来描述这个控制系统。从60年代起，世界各大城市纷纷采用电子计算机进行交通控制，节省了人力，减少了车辆的等候时间。通常的红绿灯控制系统，都是根据

车辆到达交叉点的时间间隔，车辆的排队等候时间而取平均值来进行控制的。但是，某一交叉路口何时等候车辆多，哪一个方向的车辆流量大，这些信息量都是模糊的，很难用精确的语言描述。根据交通系统的这种特点，采用模糊控制方法是比较合适的。1977年佩比斯(Pappis)和马丹尼(Mamdani)较早地运用模糊控制理论研究这一问题，并取得了较好的效果。1982年日本山形大学中津山干男等人进一步研究了十字路口交通的模糊控制问题。实现了计算机控制，它的算法语言比较简单，采用微型计算机即可实现。



(a) 交通十字叉路口



(b) 交通讯号

图 11-7 十字路口的道路模型

图 11-7 表示十字路口的道路模型，其中图11-7 a 的箭头表示车辆行进方向，图 11-7b表示讯号灯的状态。在每条路的信号灯前方有检测器，它检测车辆到达的信息，且在整个周期保持这个信息。由绿灯变红灯的过渡期间有三秒钟的黄灯，绿灯约在黄灯亮了一半时间后熄灭，检测器和停车线间保持足够的距离，使得能把后面的若干秒(10秒左右)时间内两个方向的车辆到达情况反映给控制器。控制器的控制内容是绿灯持续的时间。在绿灯期间，每10秒钟控制器控制一次，最多一共控制 5 次。

在这个系统的模糊控制中，引入了几个模糊变量：

$\underset{\sim}{T}$：表示时间模糊变量；

$\underset{\sim}{A}$：表示到达车辆数模糊变量；

$\underset{\sim}{Q}$：表示等待队伍模糊变量；

$\underset{\sim}{E}$：表示延长时间模糊变量。

仿照上述方法，可以用表格的方法来定义这些模糊变量。同时，引入两个符号mt(表示"大于")和lt(表示"小于")，这也是二个模糊集，可以给出它们的隶属函数，例如mt($\underset{\sim}{A}$)即表示对$\underset{\sim}{A}$作"大于"运算。

控制规则也是用模糊条件语句来描述，佩比斯和马丹尼采用了25条控制规则，每个规则都是$\underset{\sim}{T}$，$\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{Q}$和$\underset{\sim}{E}$之间的一个模糊关系。例如：

若 $\underset{\sim}{T}$ = 很长与 $\underset{\sim}{A}$ = mt(很多)与 $\underset{\sim}{Q}$ = lt(少)，

则 $\underset{\sim}{E}$ = 很长。

由各种控制规则组成模糊控制器，用这种模糊控制器取得了较好的效果，使平均等待时间比原来减少7%。

当道路有两个以上交叉点时(如图11-8所示)，因为一个交叉点的控制对另一个交叉点的控制产生影响。此时，对单个交叉点是最优的控制方式，而在两个交叉点时就未必是最优的，模糊控制规律将更为复杂，还需采用所谓模糊逻辑相位控制方式[35]。对此读者可参阅有关资料，此处不再详述。

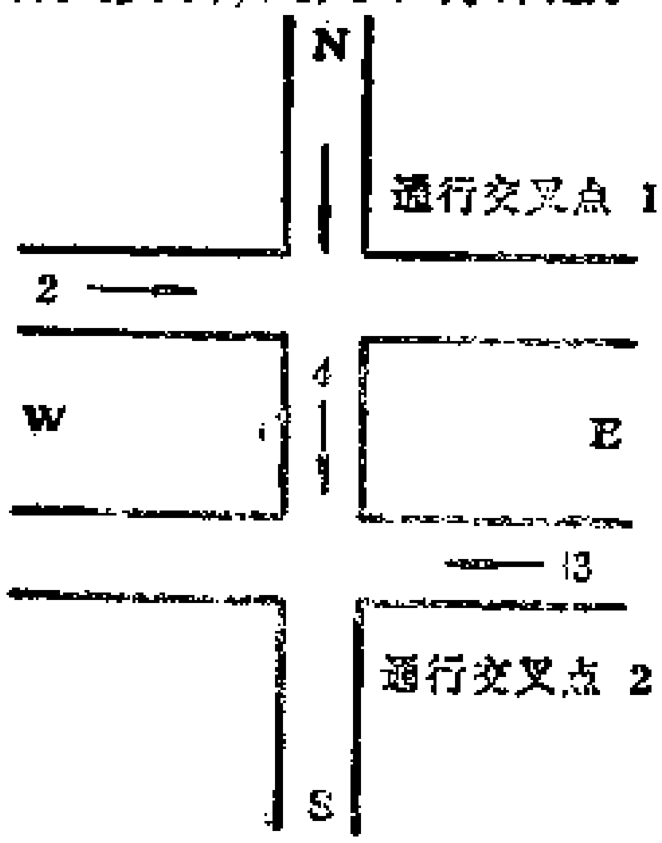


图 11-8　通行交叉口

11.5.2.3 自组织模糊控制器

关于自组织控制的一般概态和原理在本书9中已作了介绍。近年来，在模糊控制的研究中，又出现了一种自组织模糊控制器。这种控制器是对前面所介绍的模糊控制器的发展。

模糊控制的规则是基于人们对控制经验和信息的总结和归纳。但是，对某些生产过程，特别在存在随机干扰的情况下，人们往往缺乏认识和总结不出经验，因此，模糊控制的规则就很难搞出来。即使对于一些控制规则比较完善的系统，由于环境等多种因素的影响，使得原有的规则不能适用于变化了的实际过程。这就促使人们去研究具有能在运行中自动修改、完善和调整模糊控制功能，使控制系统的性能不断改善，直至达到预定的效果。这种具有自组织功能的模糊控制器被称为自组织控制器。英国普鲁塞克(T.J.Procyk)和马戴依 (H.Mamdai)在1979年介绍了他们的研究成果。

自组织控制器的结构框图如图11-9所示。

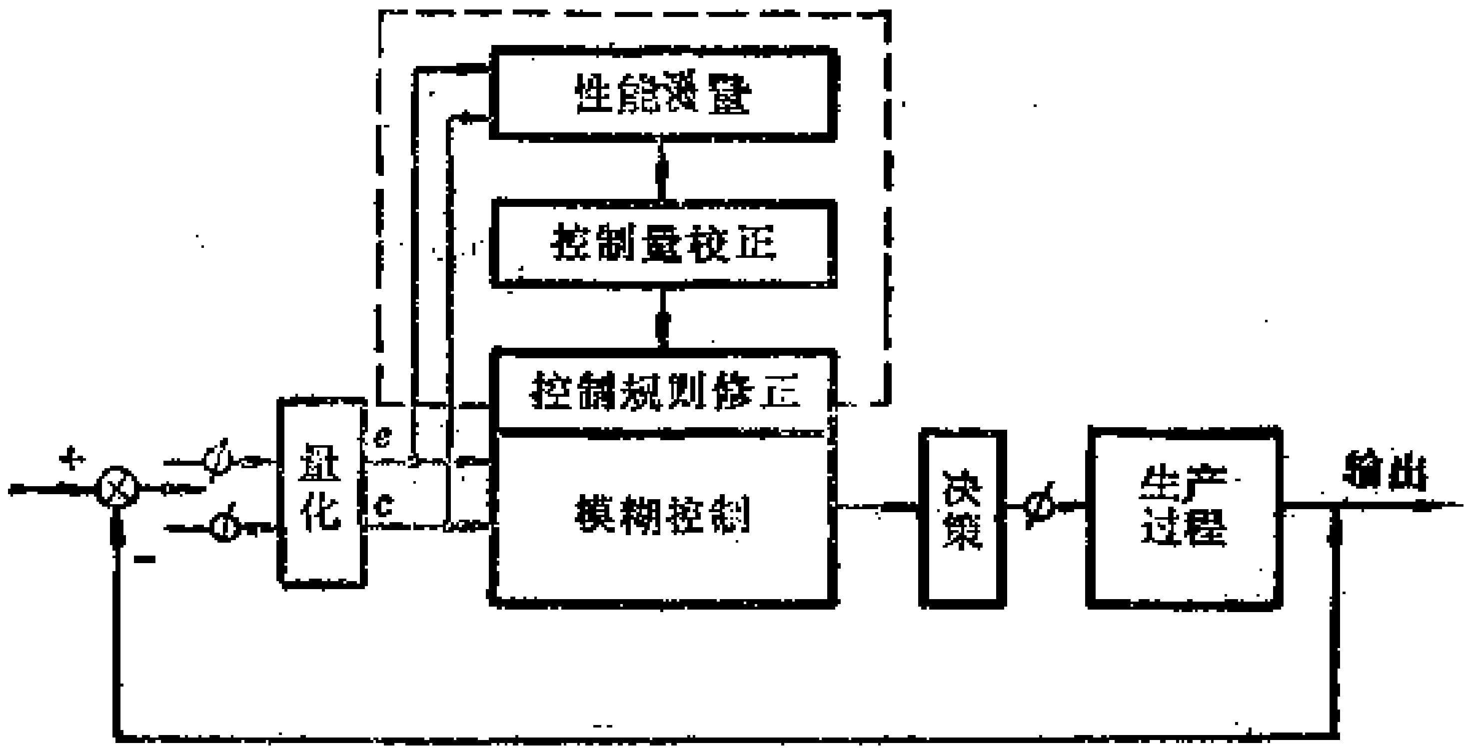


图 11-9 自组织模糊控制器的结构

这种控制器在原模糊控制器的基础上附加了三个部分：性能测量、控制量校正、控制规则修正。增加这些部分是为了在运行的过程中，调整和修改控制规则，从而达到改变控制系统性能的目的。

自组织模糊控制开始工作时，按照预先设定的比较粗糙的模糊规则实行控制，如果输出特性差，则认为模糊控制器的性能不太好，需要对模糊控制规则进行调整。这个调整的功能由三个环节实现。

首先要对模糊控制器的性能进行测量，并将其与希望的性能特性作比较。衡量生产过程对象的输出特性，在模糊控制中用了两个参数："偏差"和"偏差变化"，所以可以根据输出特性的这两个参数，来衡量输出特性与希望特性的偏差情况，确定较正量。

当输出特性的校正量确定之后，就要根据这个值来计算控制的校正量，从而确定实际生产过程的输入量。控制量的校正涉及到以下三个问题：

(1) 如何根据输出特性的校正量计算控制量校正。

(2) 在有多个输入的情况下，要确定哪个输入应校正，要校正多少。

(3) 不同采样周期的控制作用是不同的，当系统的性能变差时，要确定那个采样周期的控制应被校正。

关于这三方面的问题，此处不作详细介绍。一般说来，上述问题是根据定性的经验和定量的分析相结合的方法来解决的，往往需要多次反复。例如当系统滞后较大时，则要求控制作用提前，提前多少是根据对系统的定性和定量认识而定，需要多次反复。

控制量校正确定之后，就可以对原有的控制规则进行修改，求出修正的关系矩阵，进而求得新的控制量模糊集。经决策后，将控制作用加到系统中去，实现对系统的控制。

自组织控制器的运行过程是控制规则不断测量、修改和完善的过程。当重复试验时，若由于控制规则的修改和完善，使第二次重复试验的特性比一开始有改善，第三次比第二次好些，如此等等。随着重复试验次数的增加，控制规则渐趋完善，以致于基本不需修改，这时可以认为控制规则的修改收敛了。

以上的自组织模糊控制器是通过控制规则的修改来改善系统性能的，事实上，改变系统输出特性的方法很多，例如可通过改变

模糊集的隶属函数来改变输出性能。关于自组织模糊控制器的研究还很不成熟，它与人工智能的研究密切相关，这是一个很有吸引力的研究领域。

12 工程控制论

以上各章论述了控制论的基本理论和方法。从本章开始我们将介绍控制论应用的一些独立分支。工程控制论是控制论中最早形成的应用分支之一。关于工程控制论中的一些基本内容，实际上在前面已作了介绍，但为了使读者对控制论的主要应用分支有一个全面的、系统的了解，本章将对工程控制论作一简要的综述并举例说明工程控制论的应用。

12.1 引言

什么是工程控制论？至今仍无统一的定义。但是，我国著名学者钱学森的《工程控制论》(1954年英文版)被公认为工程控制论的奠基性专著。1980年，钱学森和宋健合著了《工程控制论》(修订版)，增补了二十多年来这门学科发展的新成果，使工程控制论的内容更为丰富和完善。

一般认为，工程控制论是控制论应用于工程技术方面而形成的自动控制理论(Automatic Control theory)，它与控制论(Cybernetics)是两个不同的概念。

从历史的发展过程来看，自动控制理论在维纳的控制论诞生之前就已经出现了。在1945年前后，已形成了伺服机构的控制理论。但是工程控制论是在1948年维纳发表控制论之后才形成的，它是将控制论的基本理论和方法用于工程技术方面，其主要技术背景是制导系统。钱学森在《工程控制论》(修订版)序言中写道："工程控制论首先建立，是控制工程系统的技术的总结，即从工程技术提炼到工程技术的理论，即技术科学。……工程控制论在其形成的时候，就把设计稳定与制导系统这类工程实践作为主要研究对象。"因此，工程控制论虽然继承了伺服机构理论的成果，但它并

不等同于早期的自动控制理论。

30多年来，工程控制论不断发展，其内容更为丰富。通常把工程控制论的发展分为三个阶段，即40～50年代的经典控制理论、60～70年代的现代控制理论和70年代以后的大系统理论。

总之，工程控制论产生于工程自动控制技术的理论和实践，经历了一个从实践到理论、从理论到实践的发展过程。由于工程控制论的理论性和实践性都很强，涉及的面广，使得与许多邻近的学科很难严格划清界限。也许正是这些“模糊”的界限，促使了多学科的渗透，进一步推动了工程控制论的发展。

12.2 工程控制论的主要内容和特征

如上所述，工程控制论经历了三个发展阶段，在每一阶段的理论基础、研究对象、方法等都有区别，见表12-1。

表 12-1 工程控制论发展的三个阶段

	第一阶段	第二阶段	第三阶段
形成时期	20世纪40～50年代	60～70年代	70年代～
理论基础	经典控制理论	现代控制理论	大系统控制理论
研究对象	单因素控制系统时不变系统	多因素控制系统时变系统	多因素、多层次控制系统
分析方法	传递函数、频率法	状态方程、时域法	时域法、模糊集方法
研究重点	反馈控制	最优、随机自适应控制	大系统、复杂系统智能控制
核心装置	自动调节器	电子数字计算机	智能机器
应　用	单机自动化	机组自动化	综合自动化

由表12-1可以粗略看出工程控制论的主要内容及其特征。以下分别对这三个阶段作一简单介绍。

12.2.1 经典控制理论

在控制论以前，经典控制理论是以1945年美国的波德(Bode)的专著《网络分析和反馈放大器设计》为标志。而在控制论以后，作为工程控制论的经典理论则是以钱学森1954年的《工程控制

论》一书为标志，主要研究单输入和单输出线性系统，采用的数学工具是常微分方程理论，拉氏交换和复变函数论，既有时域法，也有频域法，但以频域法为主(严格地说是经典频域法)。对于非线性系统是采用相平面法和描述函数法来进行分析。

在对单输入-单输出系统的特性分析方面，主要有以下三种方法：

(1) 传递函数法。这种方法是用拉氏变换将微分方程变换为相应的代数方程，然后在复频域中分析系统的特性。

(2) 频率响应法。这是一种几何方法。利用频率特性$G(j\omega)$，就可用几何作图的方法，画出当ω从零变到无穷大时在极坐标上$G(j\omega)$的幅值和相角的关系图。这种极坐标图称为奈奎斯特图(Nyquist)，是1932年由奈奎斯特提出的。

(3) 根轨迹法。这种方法是1948年由伊文思(Evans)提出的。这也是一种几何方法，是表示特征方程的根与系统某一参数全部数值之间关系的方法。这种方法的基本思想是：使开环传递函数等于-1的s值，必须满足系统的闭环特征方程。

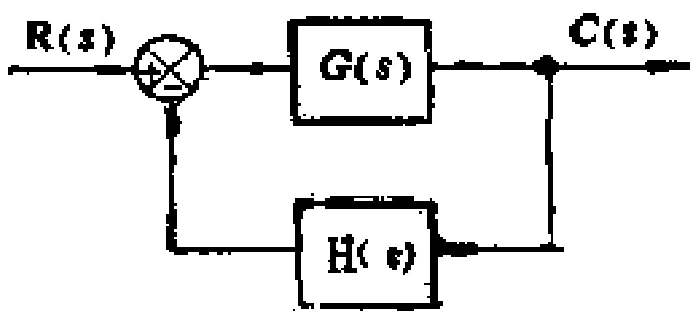


图 12-1 控制系统

例如图12-1所示的控制系统，该系统的闭环传递函数可表示为：

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)}。\qquad (12-1)$$

式中开环传递函数为$G(s)H(s)$。闭环系统对应的特征方程为：

$$1+G(s)H(s)=0。\qquad (12-2)$$

根轨迹是指闭环系统特征方程的根随开环放大系数K的变化而变化的轨迹。从图解中可以表示出对应于开环传递函数所有增

益值的全部闭环极点，从而可确定过渡过程的主要品质指标，为选择校正装置提供依据。为了画出根轨迹，人们确定了许多作图的规律。经典控制理论对于多变量线性系统的分析和控制是非常困难的，关于经典控制理论的详细论述可参阅文献[3]。

12.2.2 现代控制理论

现代控制理论是在60年代前后，逐渐发展起来的。这一理论的主要标志是卡尔曼提出的状态空间方法及能控性与能观测性等新概念、庞特里雅金等人提出的最小值原理及贝尔曼的动态规划方法。这三个方面被称为是现代控制理论的三个里程碑。现代控制理论的基本内容主要包括以状态空间方法为主的线性系统理论、系统辨识、最优控制、最优状态估计，随机控制，自适应控制等等。以上有关的内容在工程技术方面的应用就构成了工程控制论的主体。

12.2.3 大系统理论

大系统的一般理论已在上一章作了介绍，当然大系统理论不仅用于工程技术领域，它对于经济系统和社会系统也有广泛的应用，因此，大系统理论也是经济控制论的理论基础。

12.3. 应用举例

工程控制论已被广泛应用于各个领域，取得了显著的成效。本节中将举例说明工程控制论的一些典型应用。

12.3.1 造纸机的计算机控制

造纸机应用计算机控制最早是在1961年。当时美国的 Potlatch Forest Inc最初采用了控制用计算机。1965年日本开始用计算机控制造纸蒸煮工序。1964年在瑞典格鲁温的别勒鲁特牛皮纸厂 (Billerud Kraft Paper Mill)安装了控制计算机，将线性随机控制理论用于基准重量的控制。

在造纸工业中，计算机的控制对象主要有：蒸煮工序，药剂回收工序，漂白工序、打浆工序、抄纸工序等。抄纸工序是造纸工业中最重要的工序，与其他的工序相比需要更多的人工操作，因此成本较高，另外，该工序也是最后决定纸质的工序。若能用计算机实现高质量的控制，将大大提高经济效益。

在抄纸工序中主要的控制目的是控制单位面积上纸的重量和含水量，由此决定了纸的基准重量。为此对纸浆浓度、打浆度、各部分的流量及液位都要进行控制。另外，对于造纸机各部分的电气传动速度也要进行高精度的控制。

对于牛皮纸的基准重量的计算机控制原理，以奥斯特姆（Åström）等人的工作为例[8]作一介绍。牛皮纸造纸机的简图如图12-2。

厚纸浆也就是纤维浓度约为3%的水和纤维的混合物从机箱送来。用白水稀释后，使得压力盒处浓度减为0.2%～0.5%。在金属丝网上，纤维从水中分离出来并形成纸张。在压力机中水从纸张中压出，然后纸经干燥区域在汽热滚筒上烘干。

在上述过程中，通过改变厚纸浆流量和(或)厚纸浆稠度(厚纸浆中纤维的浓度)可以影响基准重量。如图12-2所示，控制系统中有控制厚纸浆流量阀及厚纸浆稀释阀的模拟式调节器，可通过改变模拟式调节器的设定点来控制变量。

基准重量由图中的β射线计测定。该仪器的输出正比于单位面积上纤维及水的重量，即湿基准重量。为了得到干基准重量，即单位面积的纤维量，β射线计的读数必须经由纸张的湿度补偿。湿度由一电容计测定。

根据基准重量信息源的分析表明：干基准重量的估计是：

$$y = \mathrm{WSP}(1 - \mathrm{MSP})。 \qquad (12\text{-}3)$$

式中WSP是标定的β射线计信号，MSP是来自湿度计的信号。干基准重量和式12-3的估值y之间的差实质上是一个含有许多高频成分的平稳随机过程。

进一步分析干基准重量与湿度之间的耦合关系以及扰动的特

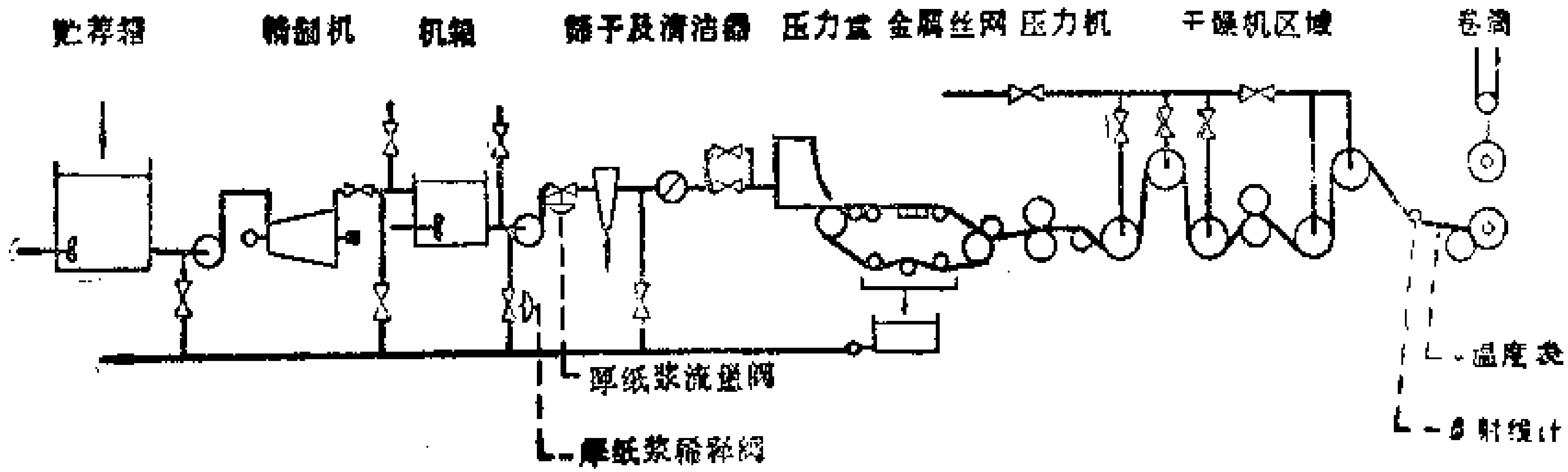


图 12-2 牛皮纸造纸机简图

性等之后，可以确定干基准重量和湿基准重量的变化与厚纸浆流量(调节器的设定点)的变化之间的关系的数学模型。一般地，它们可以用下述离散线性模型来描述：

$$A^*(q^{-1})y(t)=B^*(q^{-1})u(t-k)+\lambda c^*(q^{-1})e(t)。\qquad(12\text{-}4)$$

式中，
$$\left.\begin{aligned}A^*(q^{-1})&=1+a_1q^{-1}+\cdots+a_nq^{-n},\\B^*(q^{-1})&=b_0+b_1q^{-1}+\cdots+b_nq^{-n},\\C^*(q^{-1})&=1+c_1q^{-1}+\cdots+c_nq^{-n}。\end{aligned}\right\}\qquad(12\text{-}5)$$

若多项式 A^*,B^*,C^*的系数以及整数 n 和 k 均已知，那么上述模型即被确定。$e(t)$为白噪声。

为了确定目标函数，我们来分析基准重量方差的意义。基准重量是纸张的一项重要质量变元。在纸张出售时，通常要标明质量变元的界限。若被检验的样品表明其质量变元以一定的概率落在检验的界限之内，产品就是合格的。但是，在生产过程中，质量总是有波动的，造纸厂就把基准重量调节器的设定点选在检验界限的下限以上适当位置，用以确保产品满足规定指标。若基准重量的

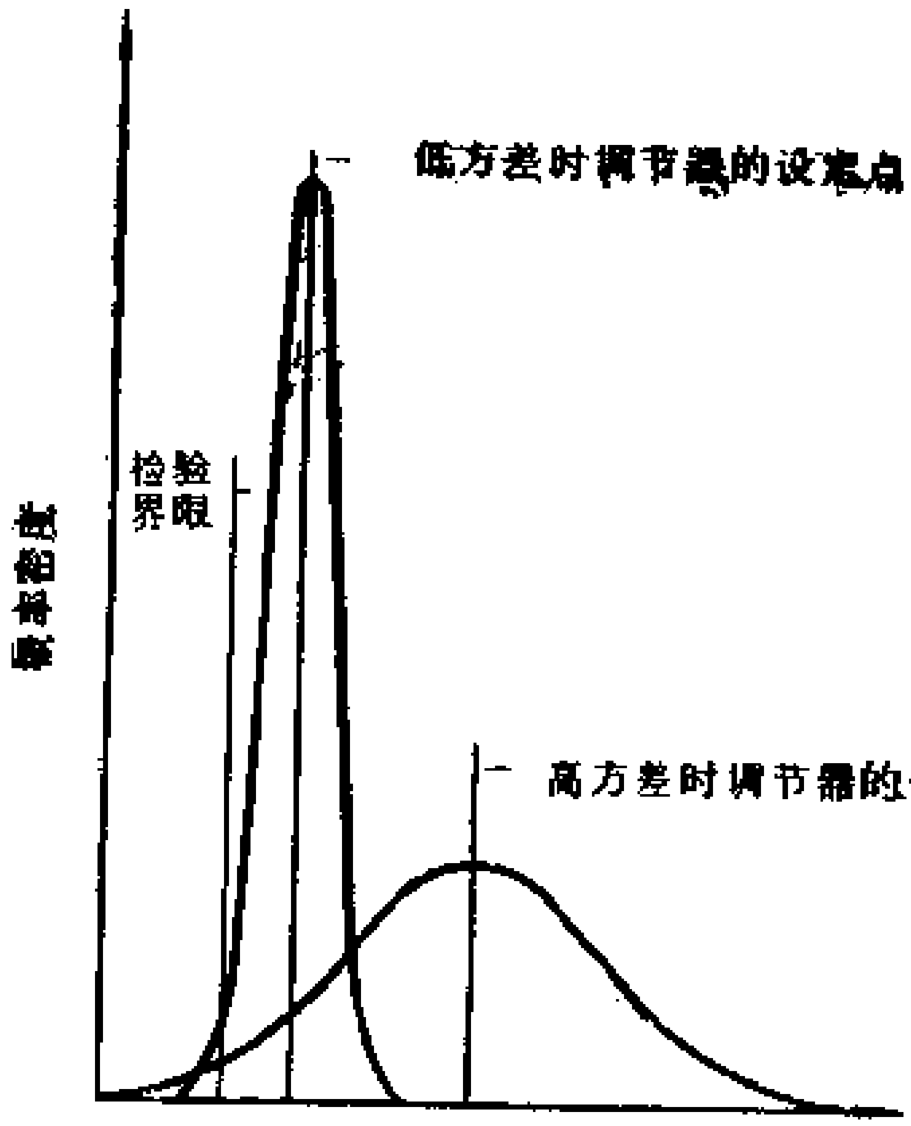


图 12-3　说明输出信号方差的降低有可能使设定点移近检验界限

方差可以减小，于是就有可能将设定点移至比较接近于可接受的界限而不改变所要求的概率如图 12-3 所示。 这样作就获得了很重要的收益(原料方面或产量方面)。由此可知，若选取使式12-4的输出信号y的方差为最小，将是一个合适的判别准则。

归纳起来，上述问题是控制一个由式 12-4 所描写的系统，使其输出方差为最小。这正是最小方差控制策略。为了求解这个问题，首先要辨识系统模型的参数、阶和滞后k的值。然后用最小方差控制策略求得最优控制。

奥斯托姆等人做了一系列实验，将控制量作微小的变动，观测由此引起的输出变化。获得了输入-输出对$\{u(t),\ y(t),\ t=1,2,\cdots,N\}$的数据。用以估计参数(设$b_n=0$)：

$$\theta=(a_1,a_2,\cdots,a_n,b_0,b_1,\cdots,b_{n-1},c_1,c_2,\cdots,c_n)^T。$$

参数估计的目标函数为：

$$V(\theta)=\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{N}\varepsilon^2(t)。\tag{12-6}$$

式中$\varepsilon(t)$称为剩余，可解释为一步超前预报误差，它与输入和输出的关系如下：

$$C^*(q^{-1})\varepsilon(t)=A^*(q^{-1})y(t)-B^*(q^{-1})u(t-k)\tag{12-7}$$

当求得使$V(\theta)$为极小的值$\theta=\hat{\theta}$时，由

$$\lambda^2=\frac{2V(\hat{\theta})}{N}\tag{12-8}$$

得到λ的估计。

$V(\theta)$的极小化可以采用递推方法计算。该计算程序涉及V关于各参数的梯度V_θ和二阶偏导数矩阵$V_{\theta\theta}$。由于模型结构比较简单，上述导数计算是不难的。模型阶的确定，是采用统计假设检验的方法，从一阶开始，继以二阶系统等等。为了对一固定的阶数得得k值，进行了重复的测辨。

对于干基准重量关于厚纸浆流量关系的模型，获得了最好的一阶模型如下：

$$y(t)=\frac{b}{1+aq^{-1}}u(t-k)+\lambda\frac{1+cq^{-1}}{(1-q^{-1})(1+aq^{-1})}e(t)。$$

(12-9)

在此 $k=4, a=-0.35\pm0.08$, $b=14.6\pm1.5$,

$c=-0.66\pm0.09$, $\lambda=0.257\pm0.017, V=3.34\pm0.44$。

上述的估计，利用了100对输入和输出数据。关于模型的统计检验表明，一阶模型是可以接受的。

对于湿基准重量与厚纸浆流量的关系模型，获得了最好的二阶模型如下：

$$y(t)=\frac{b_0+b_1q^{-1}}{1+a_1q^{-1}+a_2q^{-2}}u(t-k)$$

$$+\lambda\frac{1+c_1q^{-1}+c_2q^{-2}}{(1-q^{-1})(1+a_1q^{-1}+a_2q^{-2})}e(t)。\quad(12-10)$$

在此，$k=3, V=5.73\pm0.80$, $b_1=20.2\pm3.0$,

$a_1=-0.64\pm0.11$, $c_1=-0.82\pm0.14$,

$a_2=0.22\pm0.09$, $c_2=-0.21\pm0.14$,

$b_0=6.4\pm2.0$, $\lambda=0.335\pm0.024$。

上述估计也利用了100对输入和输出数据。关于模型阶的统计检验表明，二阶模型是可以接受的。

因此，当考虑干基准重量作为系统的输出时，模型为一阶；当考虑湿基准重量作为输出时，模型为二阶。

基于上述模型，采用了厚纸浆流量作为控制变量并应用最小方差控制策略。在控制计算机安装前，全部的实例研究表明，基准重量的标准差大于或等于1.3g/m²。在可行性研究中，基准重量波动的目标设定为0.7g/m²。自1966年初投入连续运行后，能恒定地达到如下指标：湿基准重量的标准差为0.5g/m²，干基准重量的标准差为0.3g/m²。图12-4表示了基准重量控制回路运行24小时的样本记录。在图中有湿基准重量、干基准重量、以及厚纸浆流量。控制信号（厚纸张流量）的刻度选得与干基准重量一样。因此控制信号的大小就直接表明在干基准重量中有多少波动被消除了，

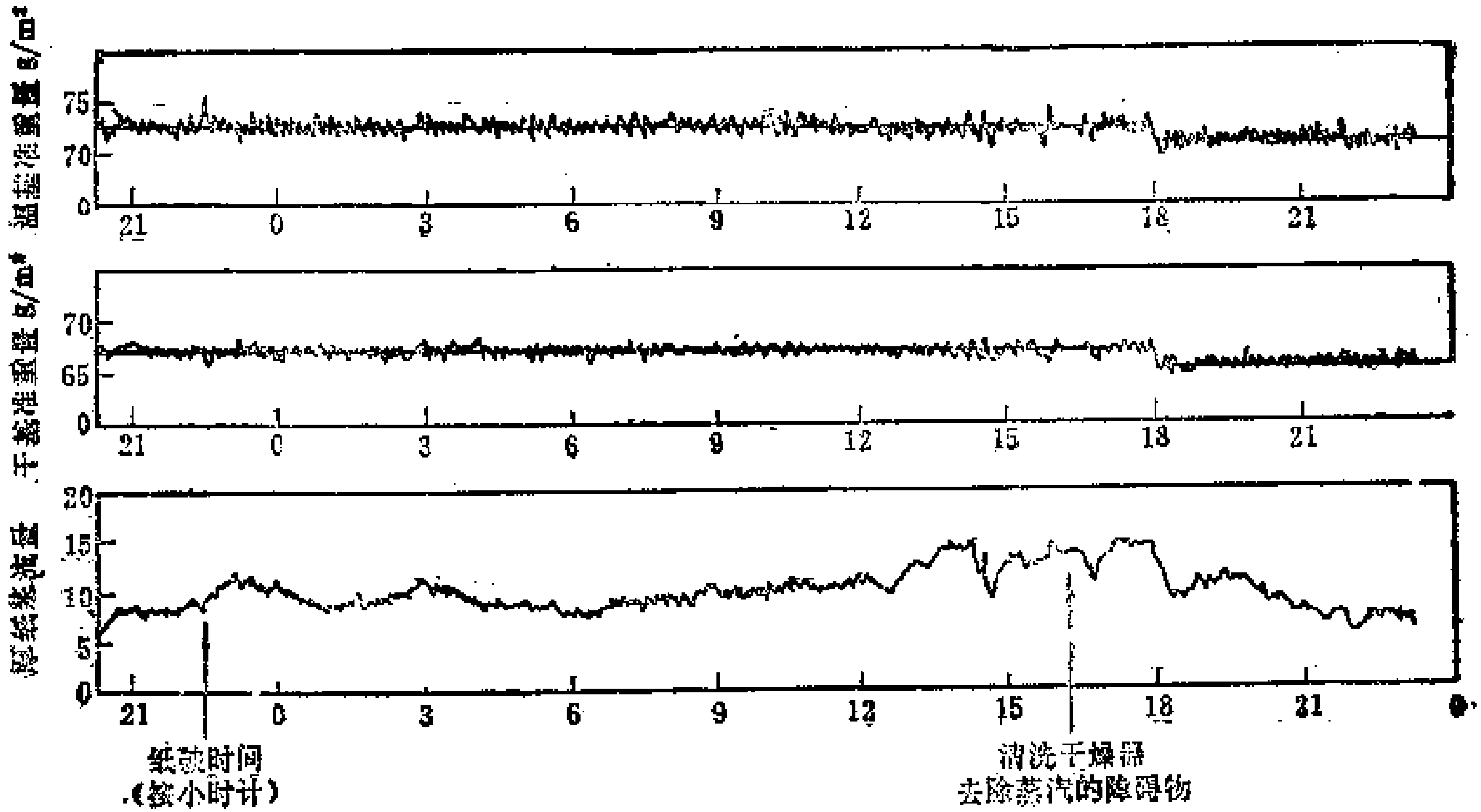


图 12-4 基准重量在线控制的运行结果

它近似地表示了系统输出中的扰动。值得注意的是纸破并未引起任何严重的扰动。

上述例子是随机控制理论被成功应用的一个著名的范例。

12.3.2 生化过程的辨识与控制

生化过程的辨识与控制是近年来发展迅速的一个领域。由于生化工程和工程控制论的发展，控制论专家和生化工程专家愈来愈紧密合作，在食品加工、生物制药、污水处理等工业过程中，都成功地实现了计算机控制。本节仅以青霉素发酵过程数学模型的参数辨识与温度最优控制为例，介绍工程控制论在这一领域中的应用。

青霉素是一种极为重要的抗菌素。在工业上，它是采用发酵的方法来制取的，其中包括孢子制备、种子缸培养、发酵和提炼几个阶段。青霉素发酵的工序示意图如图 12-5：

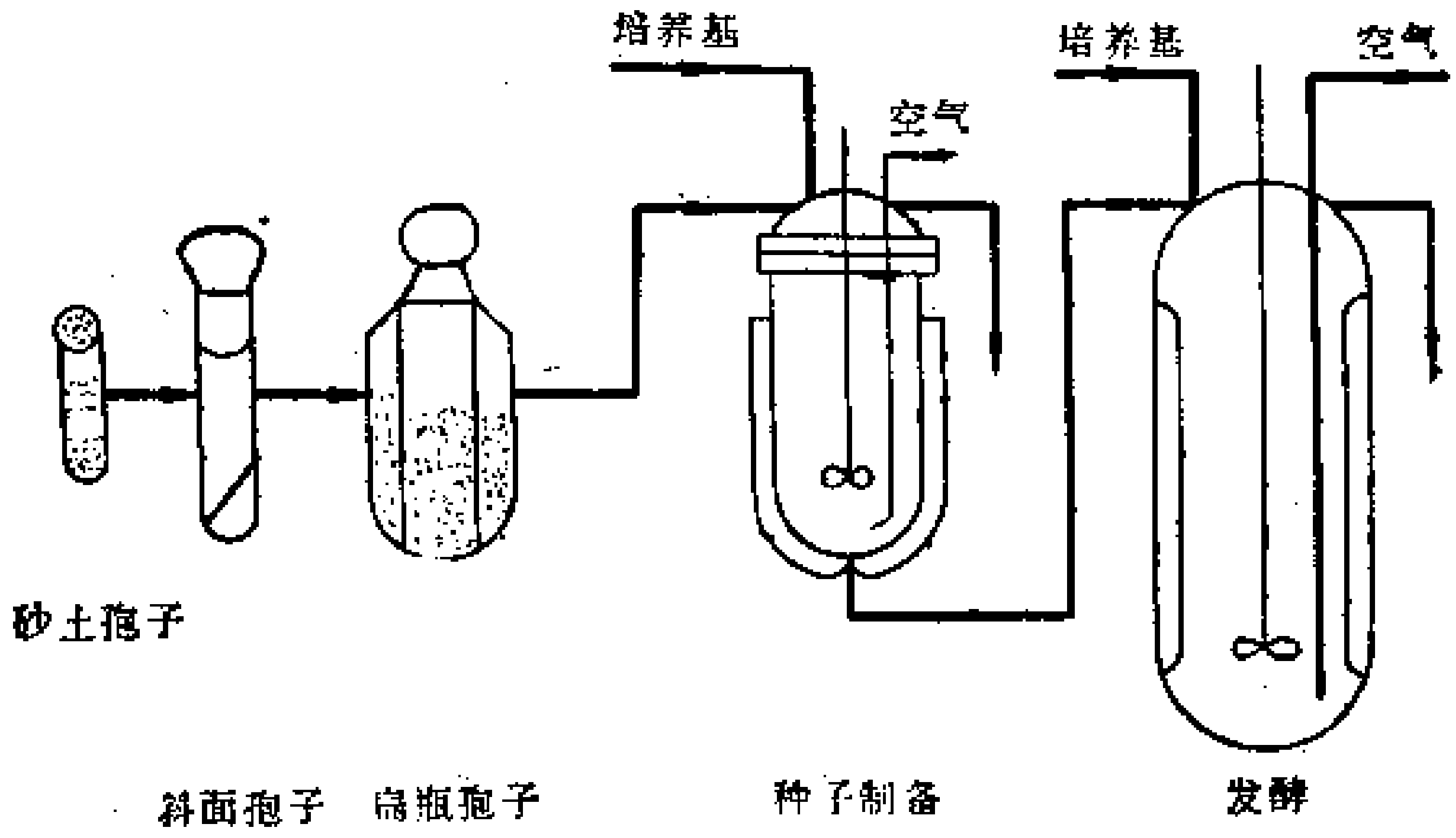


图 12-5 发酵工序示意图

在上述各工序中，发酵缸中的发酵是最关键的阶段，其目的是为了使青霉菌分泌大量的青霉素。随着现代控制理论向生化工程的深入和发展，对于青霉素发酵过程数学模型的研究已愈来愈引人注目。70年代初，康斯坦丁尼德斯(Constantinides)等人提出了

一个青霉素发酵过程的数学模型并研究了其优化方法[45,46]。由于这个模型是一个非线性较强的模型，如何辨识未知参数和寻求最优控制是一个值得研究的问题。近年来，福奇(Fawzy)、欣顿(Hinton)和汉纳(Hanna)[47,48]进一步研究了这个问题，提出了一种利用大系统分解-协调理论的多级递阶方法，作者也曾利用块脉冲算子方法研究了这一非线性系统的参数辨识问题及其最优温度控制问题，获得了一种递推辨识算法和一种较为简便的温度最优控制算法[49]。

青霉素发酵过程的数学模型可以概括如下：

(1) 逻辑定律模型：

$$\dot{x}_1(t) = b_1x_1 - \frac{b_1}{b_2}x_1^2, \tag{12-11}$$

$$\dot{x}_2(t) = b_3x_1, \tag{12-12}$$

$$x_1(0) = 0.0294, \quad x_2(0) = 0,$$

式中，

$$b_1 = w_1[1 - 0.005(u-30)^2],$$

$$b_2 = w_2[1 - 0.005(u-30)^2],$$

$$b_3 = w_3[1 - 0.005(u-20)^2],$$

$$20 \leqslant u \leqslant 30, \quad 0 \leqslant t \leqslant T\text{(反应终端时间)},$$

$$x_1(t) \leqslant b_2。$$

(2) 人口增殖型模型：

$$\dot{x}_1(t) = b_1x_1(t) - \frac{b_1}{b_2}x_1^2(t), \tag{12-13}$$

$$\dot{x}_2(t) = b_3x_1(t) - b_4x_2(t), \tag{12-14}$$

$$x_1(0) = 0.0294,$$

$$x_2(0) = 0。$$

式中，

$$b_1 = k_1\frac{1-0.005(u-30)^2}{1-0.005(25-30)^2},$$

$$b_2 = k_2\frac{1-0.005(u-30)^2}{1-0.005(25-30)^2},$$

$$b_3 = k_3\frac{1-0.005(u-20)^2}{1-0.005(25-30)^2},$$

$$b_4 = k_4 \exp\left\{\frac{-12210}{1.987}\left[\frac{1}{u+273.1} - \frac{1}{298.1}\right]\right\},$$

$$x_1(t) \leqslant b_2, \quad 0 \leqslant t \leqslant T。$$

$b_i(i=1,2,3,4)$称为参数-温度函数。

上述各式中，w_1、w_2、w_3、$k_i(i=1,2,3,4)$为待估未知参数，$x_1(t)$为菌种浓度，$x_2(t)$为青霉素浓度，$u(t)$为温度。$x_1(t)$，$x_2(t)$作为状态函数，$u(t)$作为输入函数。

控制的目的是为了选择最优的温度控制函数$u(t)$，使得青霉素的浓度达到最大值。为此选取性能指标函数为：

$$J = x_2(T)。 \tag{12-15}$$

为了求解上述问题，首先需要估计未知参数。$x_1(t)$，$x_2(t)$是可以测量的，取自 $u(t) = 25°C$时的测量值，考虑到随机干扰的影响，采用如下测量方程：

$$\left.\begin{aligned} h_1(t) &= x_1^*(t)[1 + \mathrm{KGASSU}(0, 0.1)], \\ h_2(t) &= x_2^*(t)[1 + \mathrm{KGASSU}(0, 0.1)]。\end{aligned}\right\} \tag{12-16}$$

式中，$x_i^*(t)\ (i=1,2)$表示 $u(t) = 25$时的状态轨线，GASSU(0, 0.1)表示均值为零、方差为 0.1 的正态噪声，K 是一个可变参数，对于不同的K值分别表示不同的测量水平。

由于式 12-11～式 12-14 是连续形式的方程，为便于辨识参数，需将方程离散化。离散化的方法很多，例如差分方法、块脉冲算子方法、正交多项式逼近方法等等。离散后的系统可采用最小二乘估计的方法辨识参数。关于辨识算法的推导可参阅文献[45～49]等。

辨识的结果为：$w_1 = 14.97$，$w_2 = 1.077$，$w_3 = 1.954$；$k_1 = 13.10$，$k_2 = 0.943$，$k_3 = 4.66$，$k_4 = 4.455$。

在上述数学模型已知之后，可用最优控制理论求解使 J 最大的$u(t)$函数。关于人口增殖模型，根据最小值原理可得哈密尔顿函数为

$$H = z_1 b_1 x_1 - z_1\left(\frac{b_1}{b_2}\right)x_1^2 + z_2 b_3 x_1 - z_2 b_4 x_2。 \tag{12-17}$$

式中，$z_1(t)$，$z_2(t)$，为协状态变量。协状态方程为：

$$\left.\begin{aligned}&\dot{z}_1(t)=-z_1(t)b_1+2z_1(t)\left(\frac{b_1}{b_2}\right)x_1(t)-z_2(t)b_3;\\&\dot{z}_2(t)=z_2b_4;\\&z_1(T)=0,\qquad z_2(T)=1。\end{aligned}\right\}\quad(12\text{-}18)$$

极大化的必要条件为

$$\frac{\partial H}{\partial u}=0。$$

即

$$z_1x_1\frac{\partial b_1}{\partial u}-z_1x_1^2\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{b_1}{b_2}\right)+z_2x_1\frac{\partial b_3}{\partial u}-z_2x_2\frac{\partial b_4}{\partial u}=0。$$

$$(12\text{-}19)$$

因为 $\frac{b_1}{b_2}$=常数，

所以有 $$z_1x_1\frac{\partial b_1}{\partial u}+z_2x_1\frac{\partial b_3}{\partial u}-z_2x_2\frac{\partial b_4}{\partial u}=0。\quad(12\text{-}20)$$

由上述各方程可以求解 $u(t)$。这是一个非线性二点边值和非线性代数函数方程联立求解的问题，对其求解是困难的。

另一方面，根据发酵过程的特点，青霉素的代谢在发酵过程中大致可划分为三个不同的时期：菌丝繁殖期，青霉素分泌期和菌丝自溶期。在菌丝繁殖期，菌丝体迅速增加，呼吸作用旺盛，而青霉素分泌极少；在青霉素分泌期，青霉菌丝生长速率减弱，青霉素分泌达最高峰；到了菌丝的自溶期，培养基中营养物质接近耗尽，菌丝衰老自溶，发酵液浓度转稀，青霉素分泌速率降低，此时可停止发酵，发酵液送提炼车间进行提取。

根据上述发酵特点和状态方程的特征，采用了如下状态约束

$$x_1(t)-b_2\leqslant 0。\quad(12\text{-}21)$$

而当约束达到之后，青霉菌浓度增长速率为零，此时：

$$\dot{x}_1(t)=0,\quad(当x_1\geqslant b_2时)。\quad(12\text{-}22)$$

系统将由式 12-14 和式 12-22 描述，哈密尔顿函数和协状态方程将作相应的修改：

$$H = z_2 b_3 x_1 - z_2 b_4 x_2, \qquad (12\text{-}23)$$

$$\dot{z}_1 = -z_2 b_3,\qquad (12\text{-}24)$$

$$z_1(T) = 0。$$

必要条件为：

$$\frac{\partial H}{\partial u} = z_2 \frac{\partial b_3}{\partial u} x_1 - z_2 \frac{\partial b_4}{\partial u} x_2 = 0。\qquad (12\text{-}25)$$

此时将由式12-14、式12-22、式12-23及 $z_2(t)$ 的状态方程去求解

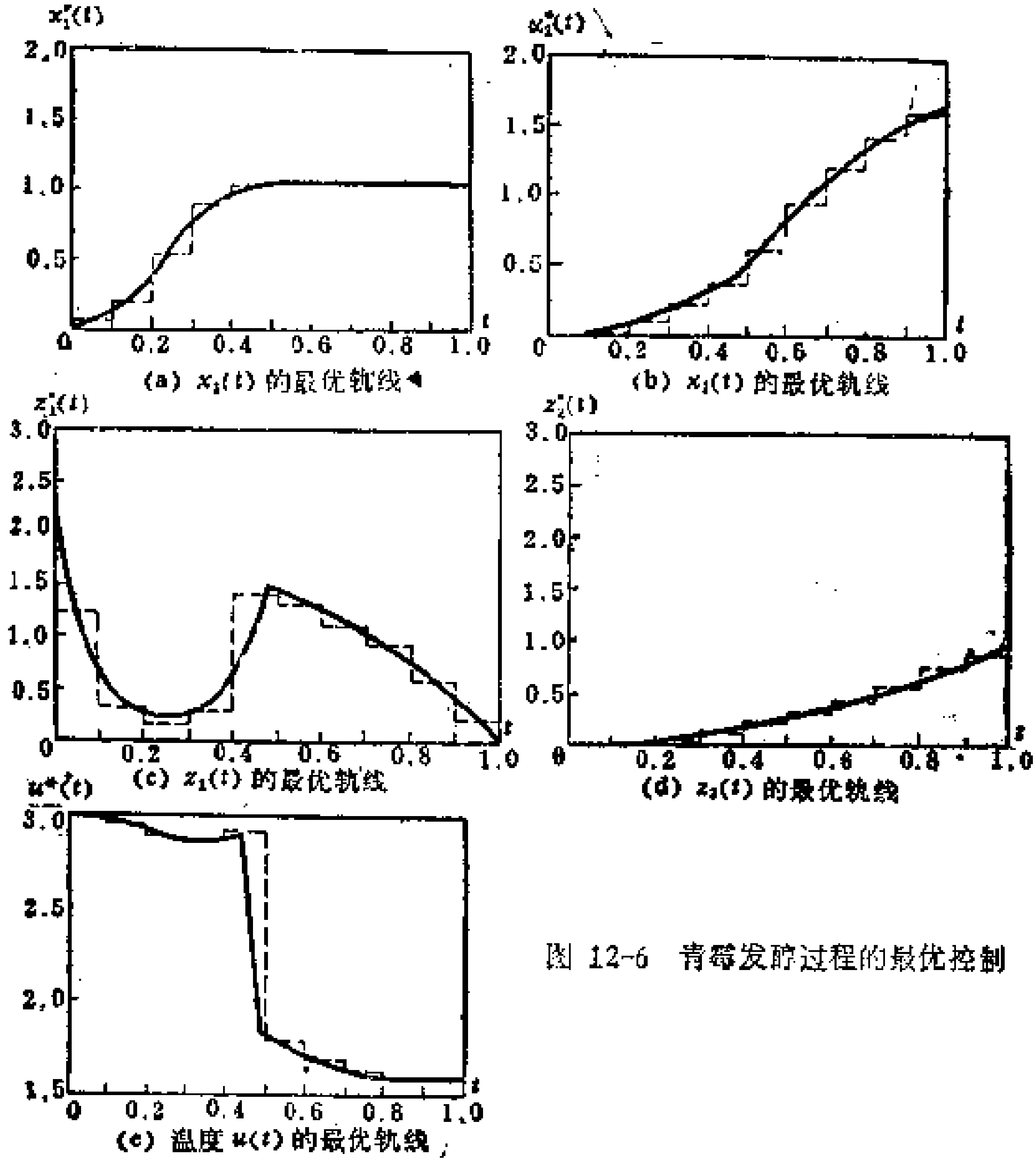


图 12-6 青霉发酵过程的最优控制

$u(t)$。这同样是一个困难的问题。

康斯坦丁尼德斯采用搜索法求解上述最优控制问题。近年来，Fawzy等人利用大系统分解协调原理，提出了一种多级递阶方法来寻求简化模型(逻辑定律模型)的最优控制温度函数。文献[49]中利用块脉冲算子方法求解人口增殖型模型的最优温度控制函数。

图 12-6 中分别给出了 $x_1(t)$，$x_2(t)$的最优状态轨线 $x_1^*(t)$、$x_2^*(t)$，协状态变量的最优轨线$z_1^*(t)$和 $z_2^*(t)$，以及温度最优控制曲线 $u^*(t)$。图中虚线表示用块脉冲算子方法求得的结果，实线表示用多级递阶方法求得的结果。块脉冲算子方法具有计算简便的优点，图中是用 10 阶块脉冲算子有限逼近时的计算结果，当阶数m增加时，结果将更为精确和逼近图中实线。

采用上述最优温度控制曲线，青霉素浓度的最终值为：$x_2(T)=1.663$(无因次量)，其中T取为 1，$x_2(T)$将比$u(t)=25$时的青霉素最终值高76.6%。这将较大地提高青霉素产量。

12.3.3 宇宙飞船的姿态控制和软着陆

工程控制论在应用上取得最辉煌成就的领域是空间技术领域。在50年代末期，人造的非线性控制系统在宇航系统中的应用就已受到了重视。空间飞行技术的研究和现代控制理论的不断完善进一步推动了这类控制系统的发展。为了获得对某种性能指标为最优的控制系统，出现了一些非线性控制系统。例如，在一个空间飞行器上使燃料消耗达到最少的最优控制系统中，将包含一个有死区的继电器型非线性特性；在一个采用太阳电池作为能源，使空间飞行器的能量消耗最小的控制系统中，将包含一个限制器的非线性特性。阿波罗11号飞船在月球上成功地软着陆和“海盗号”航天飞行器在远距地球 7000 万公里之遥的火星实现了准确的软着陆，使工程控制论达到了更高峰阶段。

载人和不载人宇宙飞船空间姿态控制的设计问题，非常适合用最优控制理论来解决，其目的在于综合控制宇宙飞船的最优策

略，以满足一个给定的性能指标。

宇宙飞船姿态控制中所包含的问题十分广泛。在主动段飞行期间，姿态控制系统从制导系统接收指令，并对飞船的姿态进行控制。这会引起飞船的航向改变，并使姿态和飞行路线方向同时变化或单独变化。飞船进入所要求的轨道后，它对某一参数坐标(如：地球、太阳或恒星)保持姿态稳定。当再入地球大气层时，飞船根据参考陀螺的信号，在俯仰轴上转到相对参考姿态的一个合适角度，然后反推火箭点火，使在转移轨道上的飞船进入地球大气层。对需要进行轨道会合以便实现轨道加油、交换宇航员和(或)进行卫星检查的载入空间站，姿态控制问题就更为复杂了。

以下简单介绍近地轨道载人和不载人飞船的姿态稳定问题。如图 12-7a 所示，飞船的姿态要保持稳定地垂直于当地垂线。对于这种绕地球运动的飞行器的一个平面，它通过红外水平扫描仪和陀螺跟踪当地垂线。这个问题的物理模型示于图 12-7b 中，其典型的姿态控制系统的的方框图示于图 12-7c 中。用 R 表示水平跟踪器的参考输入位置，并用 C 表示姿态控制系统最终输出位置，用 ω_1 表示当地垂线相对地球的变化速率，并用 ω_2 表示飞行器相对于当地垂线的角速度，用 ω_T 表示飞行器在惯性空间的速率，它是 ω_1 和 ω_2 的和。

假定摩擦力和扰动力可以忽略不计，则宇宙飞行器的运动可用下列简单的二阶微分方程来描述：

$$\ddot{C} = \frac{T(t)}{J}。 \tag{12-26}$$

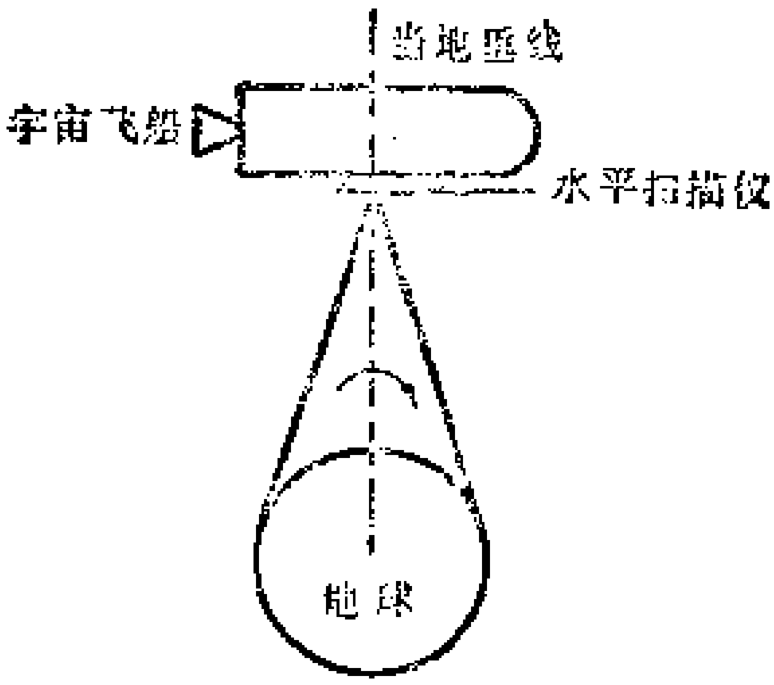
根据定义
$$u(t) = \frac{T(t)}{J},$$

可将方程式 12-26 改写成

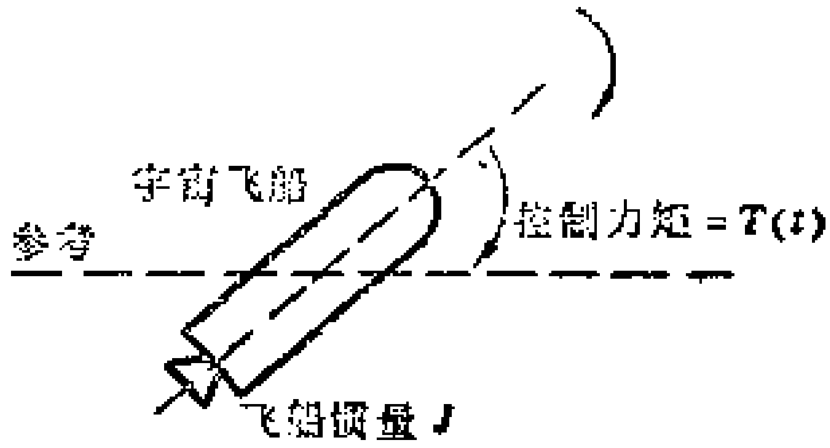
$$\ddot{C}(t) = u(t)。 \tag{12-27}$$

式中 $|u(t)| \leqslant 1$。

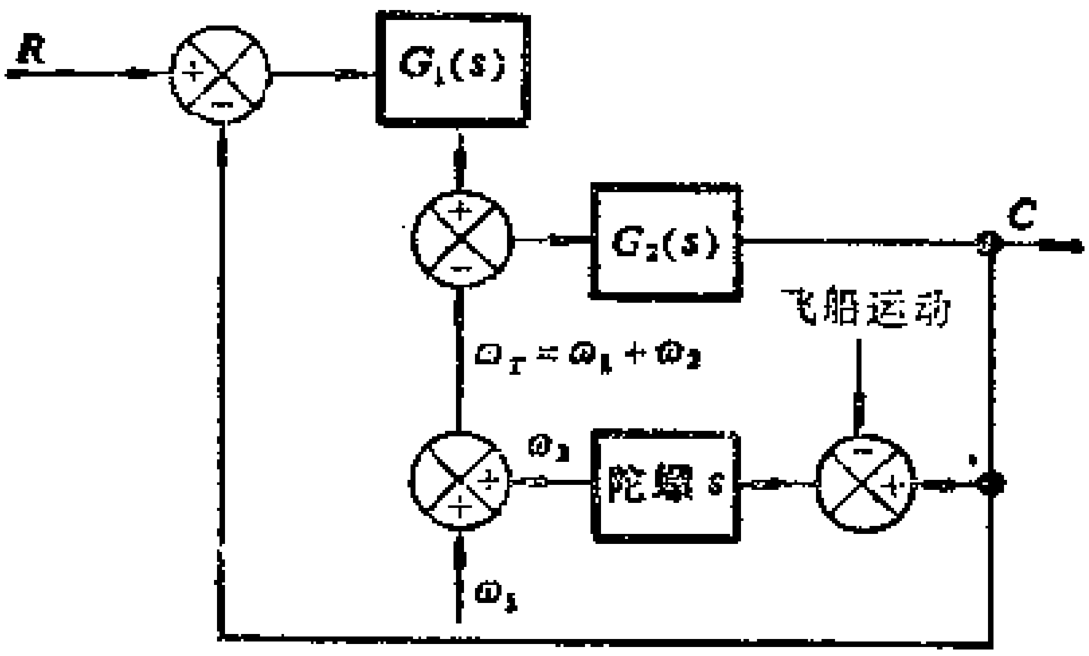
考虑到姿态控制系统的输入受到各种所加条件的限制。例如：若是一个采用喷气发动机的飞行器，则飞行器所能消耗的燃料是



(a) 由水平扫描仪建立当地垂线的姿态控制



(b) 一个平面的姿态控制问题



(c) 一个轴的姿态控制系统

图 12-7 宇宙飞船的姿态控制问题

有限制的；若一个采用太阳电池为能源的飞行器，则受到能量消耗的限制。利用状态空间符号表示，可将这个二阶微分方程改写成两个一阶微分方程，令 $C_1=C, C_2=\dot{C}$，

则

$$\dot{C}_1=C_2 \quad , \tag{12-28}$$

$$\dot{C}_2=u \quad 。 \tag{12-29}$$

因此

$$\dot{C}=Pc+Bu \quad 。$$

式中

$$C=\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}, \quad \dot{C}=\begin{bmatrix} \dot{C}_1 \\ \dot{C}_2 \end{bmatrix}, \quad P=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad u=\begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}。$$

姿态控制的基本问题是保持飞船处于参考姿态。对此问题来说，所要求的平衡状态假定为 C_1、C_2 平面的原点。

在最优姿态控制系统的综合中，要考虑下列几个问题：

(1) 最快时间问题。

(2) 最小燃料消耗问题。

(3) 最小能量问题。

在所有情况下，由于受到对宇宙飞船系统所加实际条件的限制，因此都假定 u 被限制在 $-1\leqslant u\leqslant 1$。

这些问题利用庞特里雅金最小值原理将都可以得到解决。下面仅考虑最快时间问题。

由于要求宇宙飞船响应时间最快，下面给出最快响应时间问题的性能判据：

$$S=\int_0^T \mathrm{d}t=T。 \tag{12-30}$$

利用最小值原理，哈密尔顿函数为

$$H=\lambda_1 C_2+\lambda_2 u+1 \quad , \tag{12-31}$$

协状态方程为：

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial C_1} = 0,$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial C_2} = -\lambda_1。$$

由上可解出：
$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= K_1, \\ \lambda_2 &= K_2 - \lambda_1 t = K_2 - K_1 t。\end{aligned}\right\} \quad (12\text{-}32)$$

其中 K_1, K_2 为常数。

由于方程式 12-31 中的“$\lambda_1 C_2 + 1$”项与输入 u 无关，所以哈密尔顿函数的极小值仅涉及到

$$\min[\lambda_2 u],$$

由此方程可以看出选择

$$u^* = -\operatorname{sgn}[\lambda_2], \quad (12\text{-}33)$$

可使哈密尔顿函数最小，把方程式 12-32 中 λ_2 的值代入方程式 12-33中，得到

$$u^* = -\operatorname{sgn}[K_2 - K_1 t]$$

从这个结果可以得出下列结论：

(1) 使响应时间最快的最优输入是分段常数值。

(2) 使工作时间最短的最优输入值仅是 1、-1 两个值。

(3) 使工作时间最短的最优输入符号仅能改变一次。

这些结论很清楚地意味着：当以响应时间最小为性能判据时，宇宙飞船的姿态控制系统应该是一个人为的非线性开关（bang-bang）控制系统。从物理意义上来看，就是说先加速后减速是可以获得使响应时间最快的最好办法。每种作用的时间取决于位置和速度的初始条件。

图 12-8 示出了所设计的最优控制系统的方框图，所需的基本控制元件具有理想的继电器特性，最终产生一个非线性控制系统。姿态控制系统将先加速然后减速，以获得最快响应时间。计算机将确定加速和减速时间，它们是系统初始条件的函数。

阿波罗 11 号的飞行任务是一项有历史意义的事件，在执行这

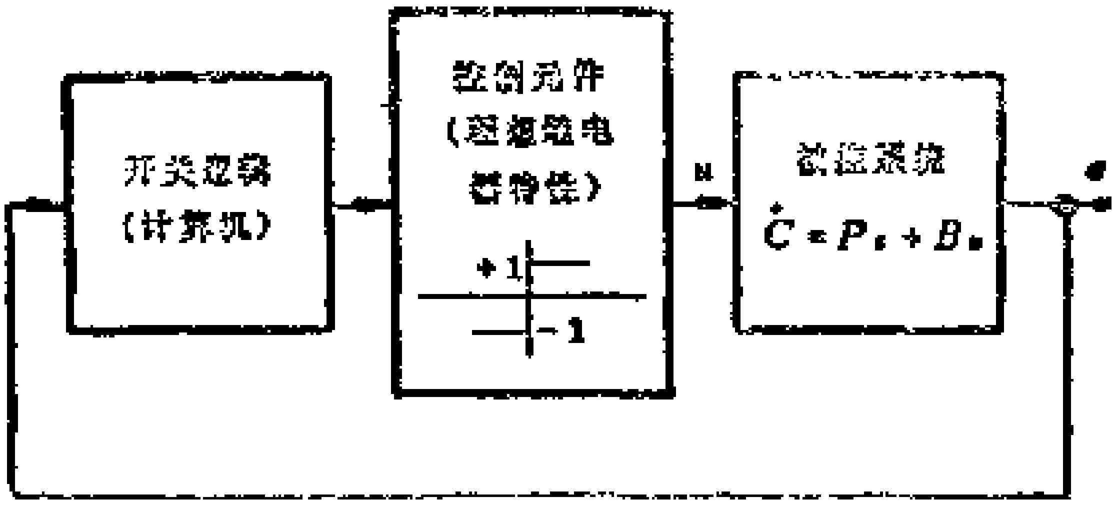


图 12-8 响应时间最快的系统

次飞行任务中，宇航员成功地驾驶登月舱在月面上软着陆。对于终端阶段为登月软着陆任务，得出推力燃料最少的最优控制策略的综合问题是一项能够用现代最优控制理论很好解决的问题[63]。如图 12-9 所示，我们首先从月面软着陆所涉及的基本物理概念来观察这一问题。在此问题中，假定登月舱的运动是垂直的，并满足下列条件：

(1) 作用在登月舱上的力仅是其本身重量和起制动力作用的推力。

(2) 在所要求的降落点附近，月面是一平面。

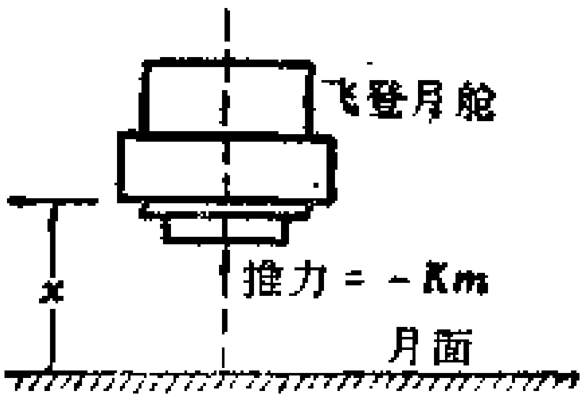


图 12-9 月面软着陆状态时作用在阿波罗登月舱上的作用力

(3) 推进系统的质量流速 $\dot{m}$ 能在零和固定下限 $-\alpha$ 之间：

$$-\alpha \leqslant \dot{m}(t) \leqslant 0。$$

根据这些假设，登月舱的运动受到下列关系的制约：

$$\ddot{x} = -K\frac{\dot{m}}{m} - g。\tag{12-34}$$

式中，x 为高度，m 为总质量，$\dot{m}$ 为质量流速，g 为月面重力加速度常数，K 为排出气体的速度。此外，系统的性能是建立在下列判据的基础之上：

$$S=\int_0^T \dot{m}(t)\,\mathrm{d}t=m(0)-m(T)。\qquad (12\text{-}35)$$

下面将用最小值原理确定登月舱软着陆的最优策略。

利用状态空间符号，可把方程式 12-34 表示为三个状态方程。

令 $x_1=x, x_2=\dot{x}_1, x_3=m, u=\dot{m}$。则系统的动态方程为

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2,\\ \dot{x}_2&=-K\frac{u}{x_3}-g,\\ \dot{x}_3&=u。\end{aligned}\right\}\qquad (12\text{-}36)$$

根据最小值原理，哈密尔顿函数为：

$$H=\lambda_1x_2+\lambda_2\left(-\frac{Ku}{x_3}-g\right)+\lambda_3u。\qquad (12\text{-}37)$$

协状态方程为

$$\left.\begin{aligned}\dot{\lambda}_1&=-\frac{\partial H}{\partial x_1}=0,\\ \dot{\lambda}_2&=-\frac{\partial H}{\partial x_2}=-\lambda_1,\\ \dot{\lambda}_3&=-\frac{\partial H}{\partial x_3}=-\frac{Ku\lambda_2}{x_3^2}=-\frac{Ku}{m^2}\lambda_2。\end{aligned}\right\}\qquad (12\text{-}38)$$

使哈密尔顿函数H最小仅仅取决于

$$\min_{u}\left[\lambda_2\left(\frac{-K}{x_3}\right)u+\lambda_3u\right]。\qquad (12\text{-}39)$$

从方程式 12-39 可以看出，只要选择

$$u^*(t)=\begin{cases}0 & \text{当}\quad \lambda_3-\dfrac{K}{m}\lambda_2<0, & (12\text{-}40)\\ -\alpha & \text{当}\quad \lambda_3-\dfrac{K}{m}\lambda_2>0。 & (12\text{-}41)\end{cases}$$

即可求得哈密尔顿函数的最小值。因此，在最优推力的程序中，既

包含有全推力，又包含有一段时间的零推力（自由下落）。这个结论说明要使燃料消耗最小，月球软着陆控制系统应是一个非线性开关控制系统。

13 生物控制论

13.1 生物控制论的产生与发展

生物控制论是控制论的一个重要分支。它是在50年代逐渐形成、60年代趋于成熟的一门边缘学科。生物控制论的产生不仅是控制论在生物科学中的应用，也是生物科学自身发展的必然结果。

早在控制论产生以前，生物科学家已对动物和人体的控制系统进行了研究，并取得了重大的成果。动物和人体的控制系统主要包括神经系统与体液调节系统，它们是神经生物学和生理学研究的对象。

经典神经生理学是以谢灵顿学派和巴甫洛夫学派为代表的，他们主要用反射概念来解释动物和人的某些活动。经典神经生理学认为中枢神经系统是一个链状结构，通过感觉接受输入的刺激，然后又把这种刺激传给负责运动的肌肉。但是在解释人的有目的行为时，巴甫洛夫的反射弧概念已经不够用了。维纳从反馈的概念出发，认为神经系统的反射弧不是一个链状结构，而是一个环形结构。反射弧的两头是由一个负反馈机制联系的，当刺激信号从感觉器官输入后，由神经系统把信号传递给运动器官，而运动器官又把自己的运动状态和情况再次通过感觉器官输送给神经系统，进行反馈；然后，神经系统根据反馈信息来调整器官的运动状态。因此，神经系统是一个整体性的带有反馈的控制系统，只有这样才能科学地理解生物体有目的行为。

维纳的这种观点，在患者有某种神经系统疾病的病人行为特征中被证实。例如，当小脑受伤后会出现目的震颤，会发生一种围绕目的物来回摆动的现象。又如在一种叫脊髓痨的中枢神经系统疾病中，由于病人失去了本体感受的感觉，又不能由视觉或其他感

觉来补偿，以至于不能完成从地上拾起铅笔这种随意动作。事实上，这是由于神经系统的损伤，使得反馈作用不适当。在上面的二种疾病中，前者是反馈过度，后者是反馈不足。由此，维纳等人提出一个重要的结论："随意活动中的一个极端重要的因素就是控制工程师们所谓的反馈作用。"从此，在生物科学领域中，开辟了生物的负反馈控制理论这个新领域。这也是生物控制论的早期研究工作。

在动物和人体的体液调节控制机制的研究中，也发生了类似的情况。在控制论产生之前，人体调节控制系统的研究只是初步的定性和定量研究。这方面的工作，大约开始于 19 世纪中叶，法国生物学家贝纳德(C. Bernard)首先提出了这个问题，他指出动物躯体中的体液是保持躯体稳定的条件，但未作深入具体的研究，20 世纪 30 年代，美国生理学家坎农(W. B. Canon)对具体的调节机制进行了实验证明和理论说明。但是，由于生物学传统研究方法的局限性，使得研究工作很难深入。控制论的产生推动了这些研究工作的深入，控制论中的新颖思想和方法，改变了生物科学研究的传统格局，开辟了一条新的途径。

在 50 年代，控制论一般只能应用于一些简化了的生物系统，大多属于解释性的分析和定性的类比，研究的结果也很难用实验作定量分析。从方法上看，一般采用控制论中的"黑箱"方法，用传递函数来描述生物系统。显然，这仅仅适用于线性的生物系统。但是，生物系统几乎都是非线性的，这就使早期的生物控制论研究具有很大的局限性。

在 60～70 年代以来，由于控制论和生物科学都有了很大的发展，生物控制论的研究对象不断扩大，研究的对象更为复杂，如对人脑系统、生物大分子系统及生命系统。研究的成果也不断增多。现代控制理论中的系统辨识方法也被广泛用于生物系统。一些专门的国际性杂志和专著陆续出版。例如，1960 年斯坦莱-约里斯(Stanley-Jones)发表了《论生命系统的控制论》一书，此书主要研究了神经系统反馈的非线性问题。第一次比较明确地提出了在

生物系统中使用现代控制理论。1976年，土耳其生理学家巴沙(Erol Basar)发表的《生物物理和生理系统分析》，强调了控制论方法与生物学方法的结合，提出了生物系统分析提纲，主张建立一门新的生理学。进入80年代以来，生物控制论的发展更为迅速，引起了广泛的兴趣。

生物控制论虽然已经有了几十年的发展历史，但是对它至今尚无一个普遍公认的定义。维纳曾给生物控制论下过如下定义："生物控制论的目的主要在于建立能反映人体和动物功能的模型与理论，而且这种模型和理论中的逻辑原理与有机体本身中起作用的逻辑原理是相同的，也试图建立与生物系统有同样的物理及生物化学成分的模型。它是少数能真正地称之为边缘科学的学科之一。无论对生物学还是医学来说，生物控制论都给了它们以一种新的、普遍适用的、能充分发挥数学威力的语言。"这个定义包含了相当广泛的含义，它强调了数学语言和功能模型在生物控制论中的应用。斯坦莱-约里斯则认为，生物控制论是把控制论的概念、原理和方法应用于研究生物系统中的信息传递、变换和处理过程，以探索生物系统的控制调节规律。目前，一般认为，生物控制论可定义为研究生物系统中信息传递、变换、处理过程和调节控制规律的科学，它所研究的对象是具有控制功能的生物系统，这个系统可以是分子、细胞、组织器官、生物个体，也可以是包括环境在内的生态系统。

目前，生物控制论的研究内容主要包括：生物系统分析和神经控制论二部分。当然，由于生物控制论涉及到许多学科，严格地确定它的研究范围是困难的。例如，生物物理学家一直认为生物控制论是理论生物物理学的一个分支；生物数学家又将生物控制论视为生物数学的一个分支；仿生学、生物医学工程与生物控制论又有许多共同之处；人工智能、机器人的研究显然又和神经控制论交织在一起；甚至中国古老的医学——中医学也和生物控制论有着千丝万缕的联系。

总之，生物控制论是一门理论性和应用性都很强的学科。它

的研究内容，随着控制论的发展、生物科学的发展及世界新技术革命的发展将不断更新和丰富。

13.2 生物系统分析

生物系统分析就是用系统分析的方法，研究生物系统各组成部分在整个系统中的作用以及整个系统的特性，并建立其数学模型。它主要包括生物反馈系统的研究和生物信号分析等方面。

13.2.1 生物反馈系统的研究

体内稳态和感觉——运动系统的研究是生物反馈系统研究的主要方面。体内稳态是指机体的内环境通过复杂的神经——体液调节过程而实现了某种动态平衡。例如，人的体温、呼吸、血压及血液中的各种成分，都是通过反馈控制而保持稳定的。

例如，考察以丘脑-垂体前部-靶腺(如甲状腺)之间的相互作用。如图 13-1 (该图引自文献[13]和[50])所示。图中 T_4 是甲状腺素，TSH 是促甲状腺激素，TRF 是促甲状腺素释放因子。

由图可见，垂体前部分泌的 TSH 刺激甲状腺分泌 T_4，而当血液循环中 T_4 增多时，反过来影响垂体，抑制垂体分泌 TSH，使血液中的 T_4 保持一定的浓度。这是一个典型的负反馈。当机体组织消耗血液中的 T_4 增多时，T_4 对垂体的抑制作用就减弱，从而使 TSH 分泌增多，又刺激了甲状腺分泌更多的 T_4 来恢复血液中的浓度。这是一条使 T_4 增多的反馈回路。此外，T_4 同时抑制丘脑分泌 TRF，从而间接地减少了 TSH 的分泌，而垂体分泌 TSH 本身又受到负反馈控制，TSH 对丘脑的作用抑制了 TRF 的分泌，TRF 的分泌还要受神经系统的影响，由此定出反馈机制的阈值。这样一个由正负反馈混合控制的系统维持了人体血液中甲状腺素的正常浓度。

更为深入地关于体内稳态反馈控制的例子是温顿(H. J. Winton)等人对人体体温调节的研究。读者可参阅文献[13, 51]。

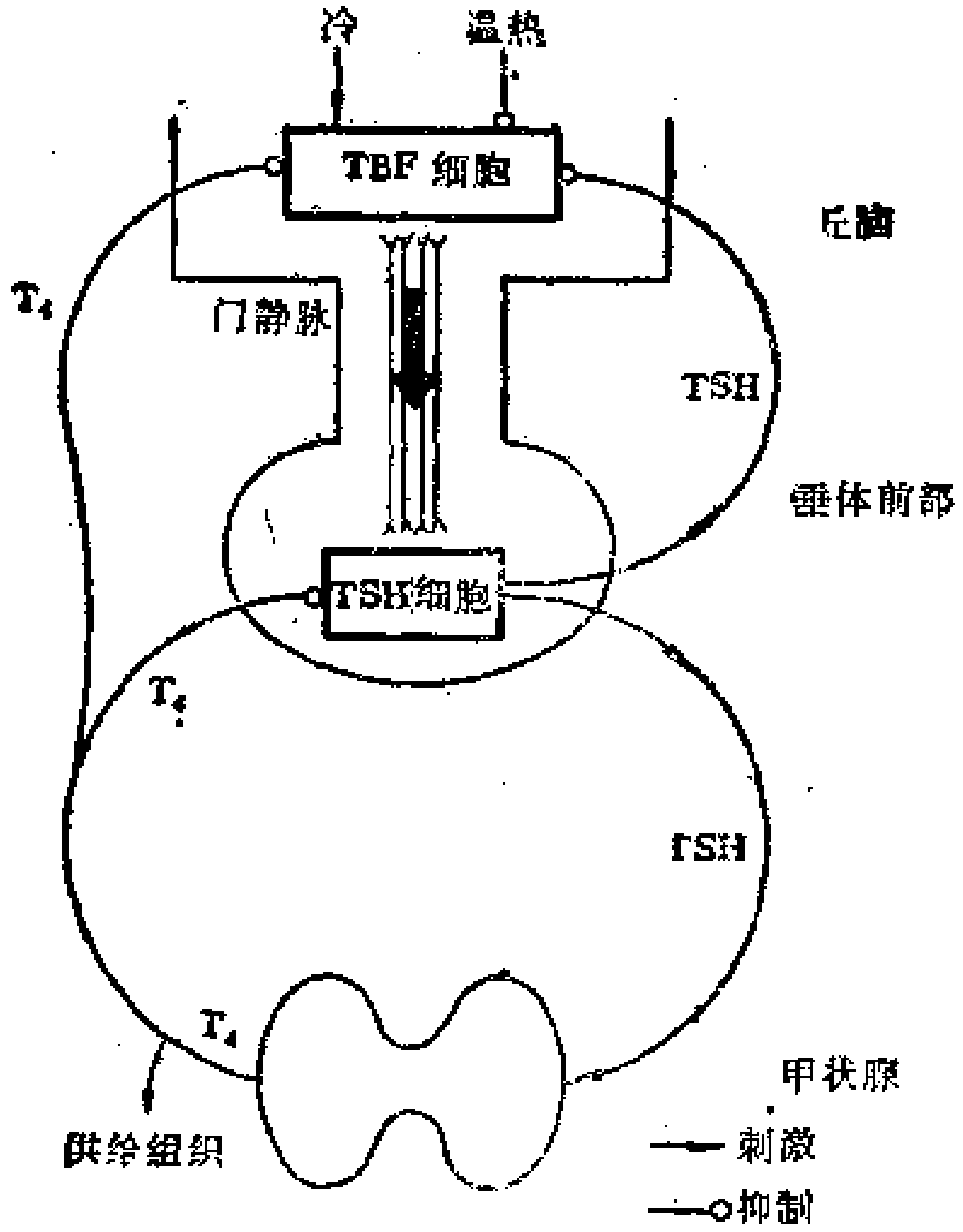
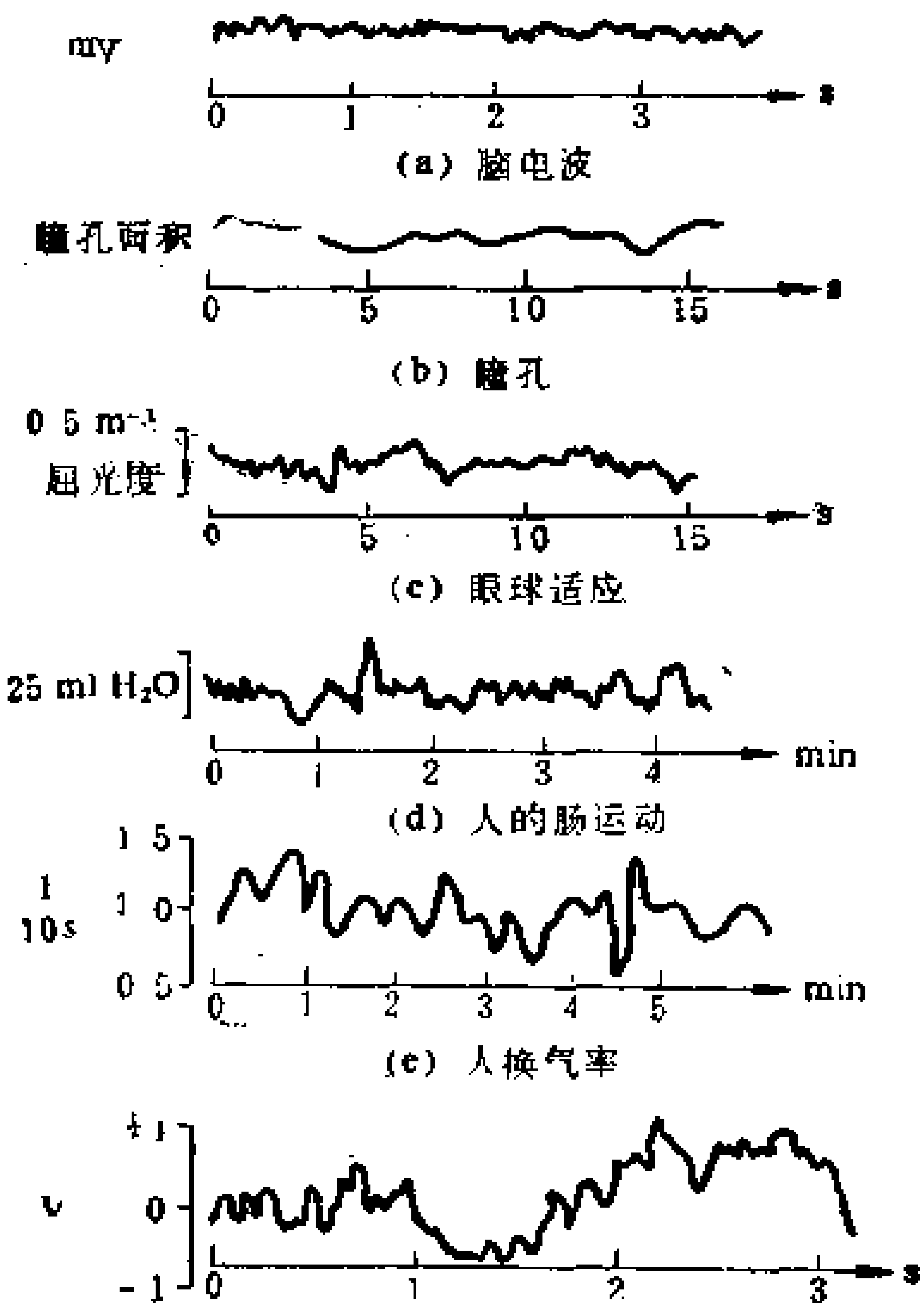


图 13-1 甲状腺控制的反馈回路

13.2.2 生物信号分析

生物信号分析也是生物系统研究的一个重要方面。生物信号往往带有随机性，是一个随机过程，有些还是非平稳的。图 13-2 表示了几种生物信号[13]。对生物信号的处理是比较困难的。目前，时间序列分析方法、卡尔曼滤波、系统辨识方法等都用到生物信号的分析和处理中去。例如，库玛马罗(K. Kumamaru)等将广义卡尔曼滤波器用于人的睡眠脑电图(EEG)的实时分析。睡眠 EEG 具有特殊的波模型，它是按照每个睡眠阶段而变化的，在 EEG 分析中，检测和识别波模型变差是基础。卡尔曼滤波方法可以用来检测 EEG 模型变差。



(a) 脑电波

(b) 瞳孔

(c) 眼球适应

(d) 人的肠运动

(e) 人换气率

(f) 随机信号发生器

图 13-2 几种生物信号

脑的电信号的分析是生物信号分析的中心课题之一。早在1875年科学家就已发现了脑发出的某些电信号，这种自发的脑电信号可以通过表面电极来测量，测量所得的曲线就是脑电图(EEG)。脑除了自发的电活动之外，还可以在电、光、声等刺激下产生诱发的电活动。脑电活动里的这样一种诱发变化称为诱发电位。

我国著名生理学家张香桐教授用更接近于生理学的术语来定义脑的诱发电位："所谓一个诱发电位是指，对在一外周感官、一感觉神经、感觉通路的一点，或感觉系统任何有关结构进行有意的刺激作出反应时，脑任何部位的可检出的电变化。"

诱发电位的研究是一个十分复杂的课题，根据控制论的观点，

脑可以看成一个"黑箱"，通过对作用于这个黑箱的输入（各种刺激信号）及其输出（由电极测出的电位信号）规律的研究，揭示脑电活动的奥秘。但是，由于脑是一个时变的、非因果的、非线性系统，使得脑信号系统的分析产生了很大的困难。安岗 (Ungan) [65]对在皮层电位研究中的疑问和难点作了系统的论述。土耳其学者巴沙(Basar)对脑电活动的动力学性质作了深入的研究，他对动物听觉系统及与之有关的听觉皮层、内侧膝状体、网状结构、下丘、海马以及视觉系统和与之有关的外侧膝状体等都进行了研究。对人的头皮视觉和听觉诱发电位也进行了研究，其结果都是相似的。

目前对于生物信号分析的研究已引起普遍重视，虽已取得了一些成果，但存在的困难和问题还很多，有待于人们进一步地探讨和研究。

13.3 生物系统的辨识

在生物控制系统的建模和辨识方面，已经有了丰硕的成果，比较集中于心血管系统、呼吸系统、肾脏功能系统、神经和感觉系统、肌肉和骨骼系统、生理动力学系统和人类操纵系统。由于生物系统的特殊性，在建模时有其独特的实验方法。例如，行为实验法，即观察被实验系统的行为特征；心理物理实验法，就是给实验系统以一定的物理信号刺激，然后观察生物系统对所给的刺激的反应；生理实验法，就是对实验系统的生理机制进行系统的变量测量。此外，在建模和辨识方法上，房室建模的方法被广泛采用。血糖控制系统辨识和人工肾系统的建模和辨识是这方面的典型例子[14,52]。

对于血糖控制系统的辨识问题，在60年代初就引起了控制论专家和医学家的重视。1961年博利(Bolie)认为，在适当的假定下，可以用二个状态变量（即血-葡萄糖和胰岛素的浓度）的简化模型来描述血糖控制系统，他利用现有的医学数据成功地估计了线性化模型的参数。1965年，阿克曼(Ackerman)等利用对口服葡萄糖耐量试验所得的数据，来估计线性模型的参数，并提出了一个

新的估计方法。在博利和阿克曼研究的基础上，日本神户大学工学院教授吉塔木拉(B. Kitamura)等建立了葡萄糖控制系统的二房室模型[52]。

实际的血糖系统可以是很复杂的，为了简化问题，吉塔木拉作了如下假定：

(1) 肝、胰及周缘组织可看成一个统一的房室。

(2) 在血管中葡萄糖及胰岛素的浓度等于它们在细胞间隙中的浓度。

(3) 除了胰岛素之外，各种激素的影响和葡萄糖通过肾脏的排泄均可忽略。

在这些假定下可以把胰岛素含量看成一个房室，葡萄糖含量看成另一个房室，从而可求得下列在平衡状态附近的线性化状态方程：

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= a_{11}(x_1 - x_{1s}) + a_{12}(x_2 - x_{2s}),\\ \dot{x}_2(t) &= a_{21}(x_1 - x_{1s}) + a_{22}(x_2 - x_{2s}).\end{aligned}\right\} \tag{13-1}$$

式中，$x_1(t)$表示细胞外胰岛素浓度，$x_2(t)$表示细胞外葡萄糖浓度，x_{1s}为$x_1(t)$的稳态值，x_{2s}为$x_2(t)$的稳态值，$-a_{11}$表示由于超过稳定状态值而产生的胰岛素迁移速率常数，$-a_{22}$表示由于超过稳定状态值而产生的葡萄糖迁移速率常数，$+a_{12}$表示由于葡萄糖浓度高于稳态值而引起的胰岛素释放速率常数，$-a_{21}$表示由于胰岛素浓度超过稳态值而引起的葡萄糖的迁移率常数。

系统的输入是静脉注射的葡萄糖，对胰岛素不存在外部输入。$x_1(t)$的初值可定为$x_1(0) = x_{1s}$。由于对受试者注入葡萄糖是在30～60s内完成的，与系统的响应相比是很短的，可以认为是一个脉冲函数，这个函数可以用$x_2(t)$的初值来代替，即

$$x_2(0) = x_{2s} + x_{20}。 \tag{13-2}$$

其中，x_{20}等于注入葡萄糖量/葡萄糖房室容量。因为葡萄糖房室的容量是未知的，故x_{20}是未知的参数。按实际要求必有：

$$x_{1s} > 0, \quad x_{2s} > 0, \quad x_{20} > 0。$$

并且从生理学观点应有：

$$a_{11}<0, a_{12}>0, a_{21}<0, a_{22}<0,$$

由实验可以测出各时刻 $t_i(i=1,2,\cdots,N)$ 的血中胰岛素和葡萄糖浓度值：$x_1(t_i)$，$x_2(t_i)$。需要辨识的参数为：

$$x_{1s}, x_{2s}, x_{20}, a_{11}, a_{22}, a_{12}, a_{21}。$$

由于系统的方程是连续形式，首先需将方程式 13-1 离散化，这可以用数值微分或数值积分的差分格式，也可以利用线性定常系统的状态转移矩阵将方程式 13-1 离散化，可得如下离散系统方程。

$$\begin{bmatrix} x_1((k+1)T) \\ x_2((k+1)T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}。 \tag{13-3}$$

若令

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}, X_s = \begin{bmatrix} x_{1s} \\ x_{2s} \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}。$$

其中T为采样周期。则有如下关系：

$$\left.\begin{aligned} &F = \exp(AT), \\ &V = -HAX_s, \\ &H = \int_0^T e^{A(T-\tau)} d\tau。 \end{aligned}\right\} \tag{13-4}$$

由式 13-3 可以估计六个未知系数：f_{11}、f_{12}、f_{21}、f_{22}、V_1、V_2。采用最小二乘估计方法。设所得的估计值分别为：$\hat{f}_{11}$、$\hat{f}_{12}$、$\hat{f}_{21}$、$\hat{f}_{22}$、$\hat{V}_1$、$\hat{V}_2$。由式 13-4 可知，A 的估计值为：

$$\hat{A} = \frac{1}{T}\ln\hat{F}, \tag{13-5}$$

$\hat{F}$为F的估计值。

令 $$\hat{H} = \int_0^T e^{\hat{A}(T-\tau)} d\tau,$$

则有 $$\hat{X}_s = -\hat{A}^{-1}\hat{H}^{-1}\hat{V}。 \tag{13-6}$$

$\ln\hat{F}$ 可用矩阵函数展开公式计算。

最后确定$\hat{x}_{20}$，由式 13-3，令$k=0$得：

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(T) - V_1 \\ x_1(T) - V_2 \end{bmatrix}, \tag{13-7}$$

又因为 $x_2(0) = \hat{x}_{20} + x_{10}$, (13-8)

所以由上两式可推得：

$$\hat{x}_{20} = \frac{1}{\hat{f}_{12}^2 + \hat{f}_{22}^2}\Big\{(x_1(T) - \hat{f}_{11}\hat{x}_{1s} - V_1)\hat{f}_{12} + (x_2(T) - \hat{f}_{21}\hat{x}_{1s} - V_2)\hat{f}_{22}\Big\} - \hat{x}_{2s}。 \tag{13-9}$$

为了使问题可解，须令$N \geqslant 4$。

根据上述方程，对 92 名受验者用静脉内注射葡萄糖耐量试验获得数据。葡萄糖浓度用葡萄糖氧化的方法测量，胰岛素浓度用放射免疫测定。模型估算和测量资料的符合率达 71.7%。为了研究葡萄糖耐量的变态性与参数间的关系，对 $a_{ij}(i, j=1,2)$ 和 120 分的胰岛素与葡萄糖的测量值($x_1(120)$, $x_2(120)$)进行了主成分分析法和聚类分析法分类。可以把葡萄糖耐量变态性的各种情况在参数空间中画出图形，这样的分类法几乎与临床诊断是一致的。分类结果如表 13-1 所示[14,52]。

表 13-1 六个参数聚类分析结果

聚类	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	$x_1(120)$	$x_2(120)$
1	−0.055	0.011	−0.094	−0.016	6.8	90.0
2	−0.046	0.009	0.130	−0.074	8.8	93.5
3	−0.119	0.041	−0.024	0.024	8.0	75.1
4	−0.150	0.062	0.021	−0.035	31.3	189.0
5	−0.128	0.012	−0.831	0.041	14.9	193.0
6	−0.066	0.002	0.025	−0.017	11.9	274.0
7	−0.075	−0.005	0.658	0.034	57.9	183.0
8	−0.038	0.040	−0.008	0.002	88.4	135.0
9	−0.138	0.013	1.57	−0.155	3.0	335.0
10	−0.667	0.224	−0.803	0.245	8.1	60.0

表中十个分类简述如下：

聚类1： 属于这类的人员基本上都是糖耐量试验正常者。其中虽有三例异常，但仅用饮食控制就恢复了正常状态。

聚类2： 属于这类的人员也可认为是正常者，但与聚类1相比，a_{21}为正值，反映出胰岛素作用是不足的。

聚类3和5： 属于这两类的人员是过度肥胖和强食欲者，胰岛素响应一般是迅速的，否则将会导致肥胖型糖尿病。

聚类4： 与聚类3相比，胰岛素作用更加不足。

聚类6、7、9： 属于这些类的人员，胰岛素释放极其微弱，临床上可列为幼年型或胰岛素依赖型糖尿病人。

聚类8： 属于这类的人员大都是典型的肥胖型糖尿病人。

聚类10： 这类人员是属于处于急性肝炎恢复期具有反常新陈代谢的病人。

13.4 脑和神经系统

脑是最复杂的物质，它是人类认识世界的器官，是实现最高超控制功能的控制系统。许多世纪以来，揭开大脑的奥秘始终是控制论学者以至所有科学家梦寐以求的目标。脑科学的研究始终是科学的前沿。这是一个十分庞大的科学系统。它需要研究大脑结构和功能，研究大脑与行为的关系，大脑与思维的关系、大脑的演化、大脑的生物组成，神经网络及其规律。

从控制论的观点来看，人们致力于研究活机体中的控制系统并试图再现活的控制机制的功能，其最终的目标必然归结为揭示大脑——这块高度复杂而有序的物质是如何工作的，是怎样实现其控制的。

在本节中，将简要介绍，大脑中神经系统的控制理论，它属于神经控制论范畴。神经控制论主要研究动物及人体神经系统中信息的传递、变换及处理等方面的问题，它主要包括神经元和神经网络模型的研究、感觉信息处理研究和脑理论、脑模型研究等方面。

13.4.1 神经与神经网络

神经元是神经系统的基本结构和功能单元。神经系统由大量的神经元组成，人的大脑皮层大约有一百多亿个神经元，每个神经元都是复杂的信息处理单元。神经元是一种特化的细胞，具有可以被激励并能沿某一方向传导信号的性质，它由三部分组成：

(1) 细胞体。它含有细胞核和细胞质，它们由膜包裹着。

(2) 树突。从膜伸出的一些分支体；

(3) 轴突。一条轴向的延伸体。

轴突的末端分支通过突触和其他细胞接触。轴突还分出别的分支，叫侧支，侧支也和其它细胞接触。神经元的模式如图13-3所示[5]。

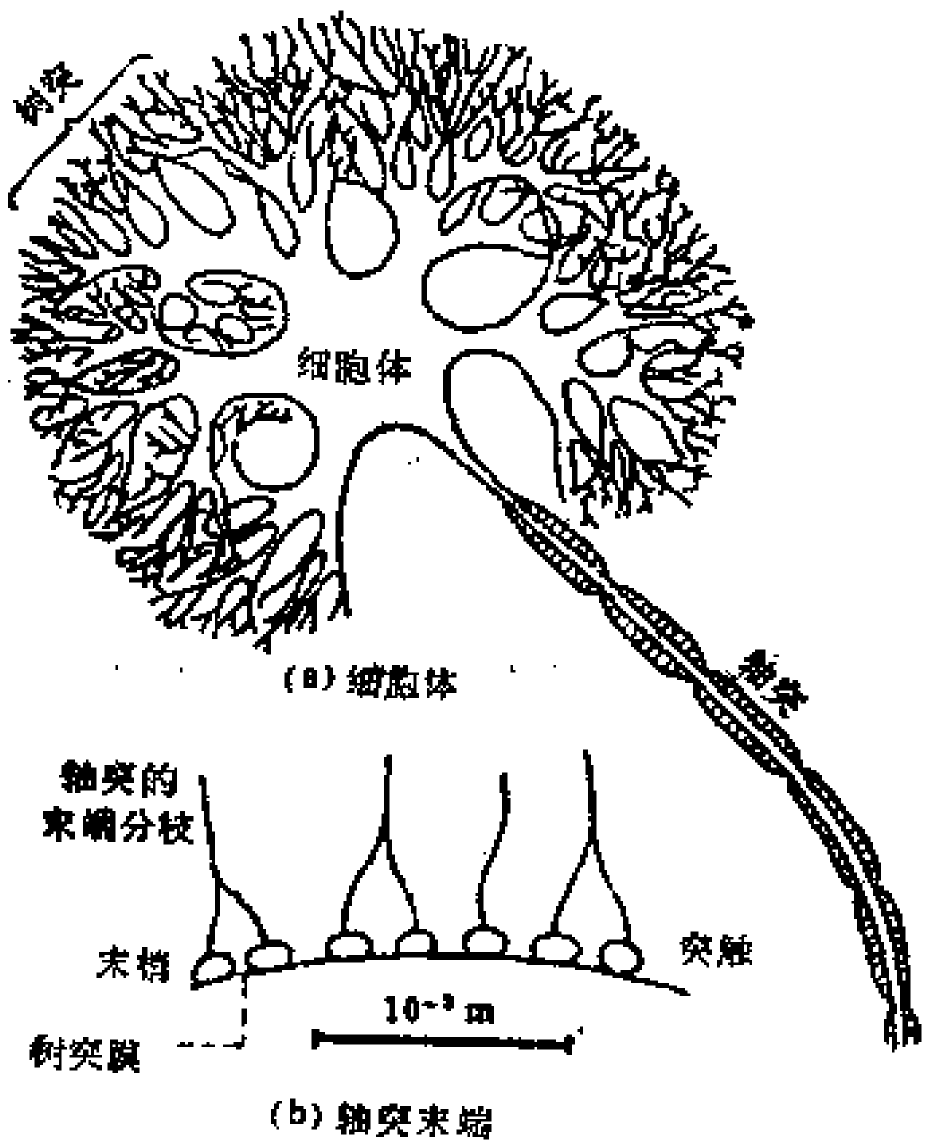


图 13-3 神经元的模式图

神经信号作用在突触上，从而使神经元受到激励，这种信号可以使神经元兴奋，也可以使神经元抑制。一个神经元有100～1000个突触。神经元膜的状态(它的电位)取决于馈给突触的信号的大小和持续时间。当膜电位达到某一阈值(约40mV)时，就出现

一个神经冲动，它沿着突轴的神经纤维传播。神经元产生的信号是符合“全或无”原则的，即它所产生的信号总是大小一样的，在神经纤维中的信号，或者等于零，或者有最大值。

1943年，麦克卡洛和匹茨第一次提出了神经元的数学模型。这个模型用一个以二进制码来操作的、具有一个输出多个输入的阈装置来表示。作用在这种形式神经元上的输入作用可以是+1或-1。当作用超过阈值时，神经元就兴奋，并将产生输出信号。从神经元的第一个模型至今，已经提出了一百多种不同的模型，它们可以在不同程序上表现时空总和、阈值、不应期、适应性等神经元的基本属性。

神经元的一个典型数学模型如下：

设模型有 n 个输入变量 $x_j(t)$ ($j=0, 1, \cdots, n-1$), $x_j(t)$ 是二值变量。它表示第 j 个输入在 t 时刻的状态：

$$x_j(t)=\begin{cases}1 & \text{当第 } j \text{ 个输入端有输入时，}\\ 0 & \text{当第 } j \text{ 个输入端无输入时。}\end{cases}$$

t 时刻的输出 $y(t)$ 也是二值变量，有输出时为1，无输出时为0。输入与输出之间的关系可用如下方程描述：

$$y(t+1)=\frac{1}{2}\operatorname{sgn}\left[\sum_{j=0}^{n-1} V_j x_j(t)-\theta\right]+\frac{1}{2}。\qquad (13\text{-}10)$$

其中将信号从一个神经元传到另一个神经元所需的时间取为单位时间，V_j 为第 j 个输入的权重，θ 为阈值，sgn(·)是符号函数：

$$\operatorname{sgn} z=\begin{cases}-1 & \text{若 } z<0,\\ 1 & \text{若 } z\geqslant 0。\end{cases}\qquad (13\text{-}11)$$

因此，神经元在 t 时刻有脉冲发放的条件为：

$$\sum_{j=0}^{n-1} V_j x_j(t-1)\geqslant 0。\qquad (13\text{-}12)$$

这类神经元模型称为“形式神经元”。它可用图13-4表示。

其中箭头表示兴奋性输入端，圆圈表示抑制性输入端。三角形内

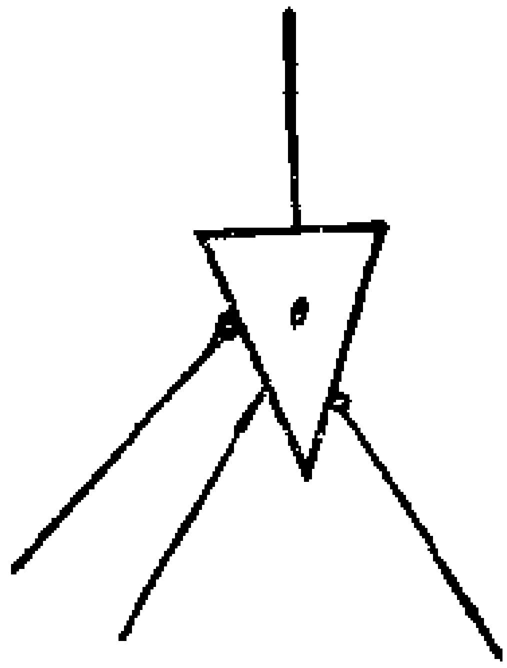


图 13-4 形式神经元

的数值 θ 是阈值。

神经元不是孤立存在的，每个神经元都与许多神经元相互联系。大脑皮层中，每个神经元平均与一千个左右的神经元联系。因此，要研究神经系统的信息处理问题，仅研究神经元模型是不够的，必须研究神经网络的特性。显然，由于网络中神经元数量和相互间联系的渠道数量很大，再加之神经元的非线性特性，使得对神经网络的分析遇到了很大的困难。目前，对神经网络的模拟大多在计算机上进行。

由于神经元的输入和输出都是二值变量，人们自然会想到用逻辑代数来分析神经网络。实现基本逻辑的神经元网络如图 13-5 所示。图中 $\bar{X}_i$, Y, Z 分别表示输入状态、输出状态、中间神经元状态；兴奋性突触用箭头表示，抑制性突触用圆圈表示；三角形代表神经元，三角形中的数字代表神经元的阈值。

图13-5a表示实现逻辑乘(∧)运算的网络：

$$Y(t+1)=X_1(t)\wedge X_2(t)\wedge X_3(t)\wedge \bar{X}_4(t)\wedge \bar{X}_5(t)。$$

图13-5b表示实现逻辑加(∨)运算的网络：

$$Y(t+1)=X_1(t)\vee X_2(t)\vee X_3(t)。$$

图13-5 c 表示实现延迟运算的网络：

$$y(t)=Z(t-1)=X(t-2)。$$

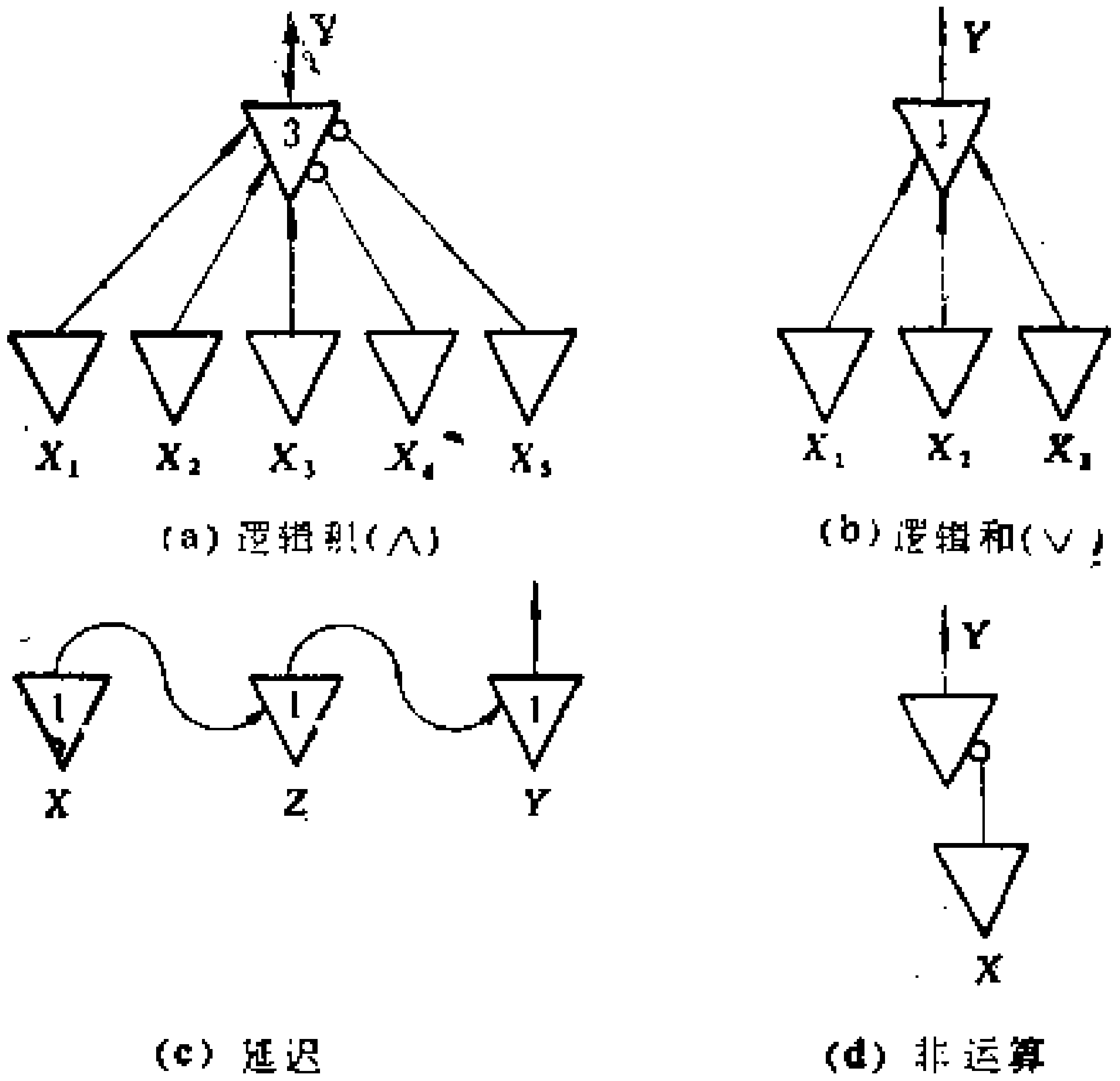


图 13-5 实现基本逻辑运算的神经元网络

图13-5d 表示实现"非"运算的网络：

$$Y(t+1)=\overline{X}(t),$$

如果神经网络包含反馈回路，那么它在任一给定时刻的状态就和初始状态有关。例如，图13-6 a 中如果在初始时刻(t-1) 神经元X或Z兴奋，那么神经元 Z在此后所有时刻都将一直处于兴奋状态。在图13-6b中，只要神经元Z在初始时刻兴奋，且神经元 X从初始时刻到所考察时刻一直保持兴奋，那么Z 在所考察时刻之后的一个时刻就会兴奋。在图13-6c 中，神经元Z只有当它在初始时刻兴奋，并且X一直未受到兴奋时才会兴奋。

含环神经网络在功能上不同于不含环网络。前者可以在相当长的一段时间内"记忆"某些事件(神经元在一定时刻的状态)，而后者最多只能把事件的痕迹保持有限数目的时间单位，其有限数目为网络中神经元相互串联的最多突触数。

人的神经网络系统，由于受到各种因素的影响，也可能引起功

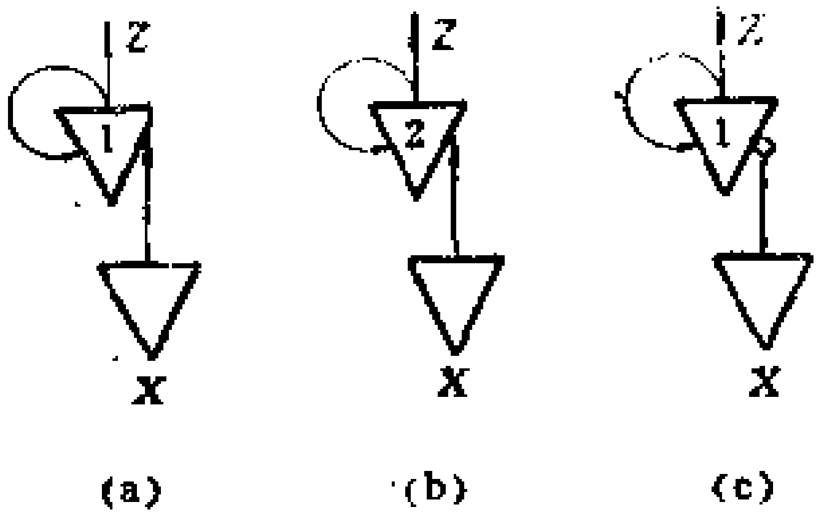


图 13-6 含环神经网络的例子

能失误，这与人工的有限自动机的逻辑网络一样。因此，关于系统的故障预测和可靠性分析理论，可以用来分析神经网络系统。

如果网络中每一个元件发生错误的概率为 $\epsilon>0$，即使这个数量很小，一旦某一个或几个元件发生了错误，可以想象，由于这些错误完全可能导致整个系统出错。在人的神经系统中，含有上百亿的神经元，这些神经元显然不会有无限高的可靠性，那么，人们就很难理解为什么神经系统能可靠地稳定工作几十年。美国科学家 J·冯·诺伊曼提出并证实了网络中增加可靠性的方法，方法之一是用复线。实现复线的元件刻为“混合器”。见图13-7。混合器实现下列运算：

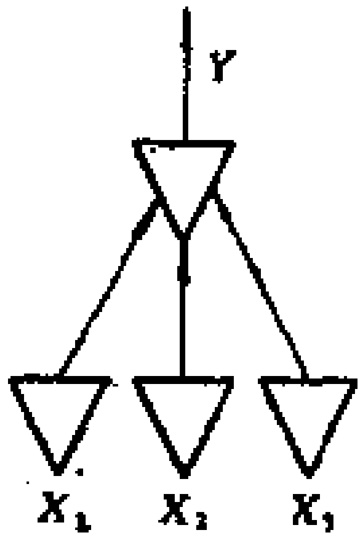


图 13-7 混合器

$$Y(t+1)=[X_1(t)\wedge X_2(t)]\vee[X_2(t)\wedge X_3(t)]\vee[X_1(t)\wedge X_3(t)]。$$

这一运算实现“少数服从多数”的原则：如果在前一循环时，混合器的三个输入中至少有两个处于兴奋状态，则这一器官就兴奋。

以上的"复线"方法，有助于理解神经系统的可靠性。此外，在动物和人的神经系统中，很可能有一群神经元能作为再生器官而起作用，并保证复杂的神经系统可靠地工作。

目前，关于人体神经网络的模型就是建立在上述基本单元逻辑网络的基础之上。这种模型使我们能用形式方法来研究神经系统，它类似于一台自动机，并且具有动物和人类神经系统的某些类似特性。这种神经网络能够模拟调节器的功能、反射和条件反射机制，以及由某些神经病引起的变态。当然，这种网络仅仅是非常复杂的真实神经系统的简化模型。

13.4.2 感觉信息处理

在神经控制论中，关于感觉信息处理的研究，已取得了一定的进展。生物系统对于外界环境的感应性是单细胞生物就已具备的特性。随着生物的进化，逐渐形成了发达的感官和中枢神经系统。对于人体来说，视觉、听觉、味觉、嗅觉、触觉以及体表的温度感觉、内耳的平衡感觉等等。所有的感觉器都不断地向中枢提供有关外界环境和体内机能状态的信息，这个信息量非常巨大。各种感受器的一个共同特点是其兴奋阈值较低，感受性很高。在生物控制论中，最感兴趣的不是动物感受器的高感受性，而是它的信息处理能力。各种感官在信息处理方式上也有其共同性，如适应性、侧抑制原理和感受野等。目前，已知道了一些有关生物感觉信息编码和处理的简单规律，如刺激强度和稳态反应之间的幂函数规律、神经信息的编码形式等等。在各种感官中，研究最集中的是视觉信息处理系统。这不仅因为视觉在人体各种器官中有特别重要的地位，人体从外界获得信息，绝大部分是从视觉获得。而且，对于视觉信息处理系统的研究将有助于大脑的信息处理系统的研究和智能机器人的研究。目前，已经有了一些关于视网膜的模型和理论。

13.4.3 脑信息处理系统

人的中枢神经系统是由脑和脊髓组成的，脑是人体控制系统

的中心。因此，脑的信息处理系统的结构和原理是神经控制论研究的中心问题。但是，由于脑十分复杂，这方面的研究进展不快。

在控制论产生的初期，人们是从生物的整体性功能上去模拟脑的活动。1948年艾什比写了一篇题为《设计一个脑》的论文。他认为，人脑具有通过负反馈校正偏离中心最佳状态的能力，这样就能使人从复杂的环境中取得经验并适应环境的变化。这种负反馈的自适应能力使人脑能获取并处理信息。他根据这种观点制作了由四个单元组成的稳态机。

1958年，雷森伯拉得(Rosenblatt)设计了模仿神经系统局部结构与功能的感知机(Perceptron)。简单的感知机有三层结构：见图 13-8。这类装置可以通过几小时的学习，能可靠地区分潜艇和海豚发出的声响。这是最初的能学习识别图形的自动机，它比稳态机前进了一步，开始具有了“学习”的功能，因而视为脑模型研究的真正起点。

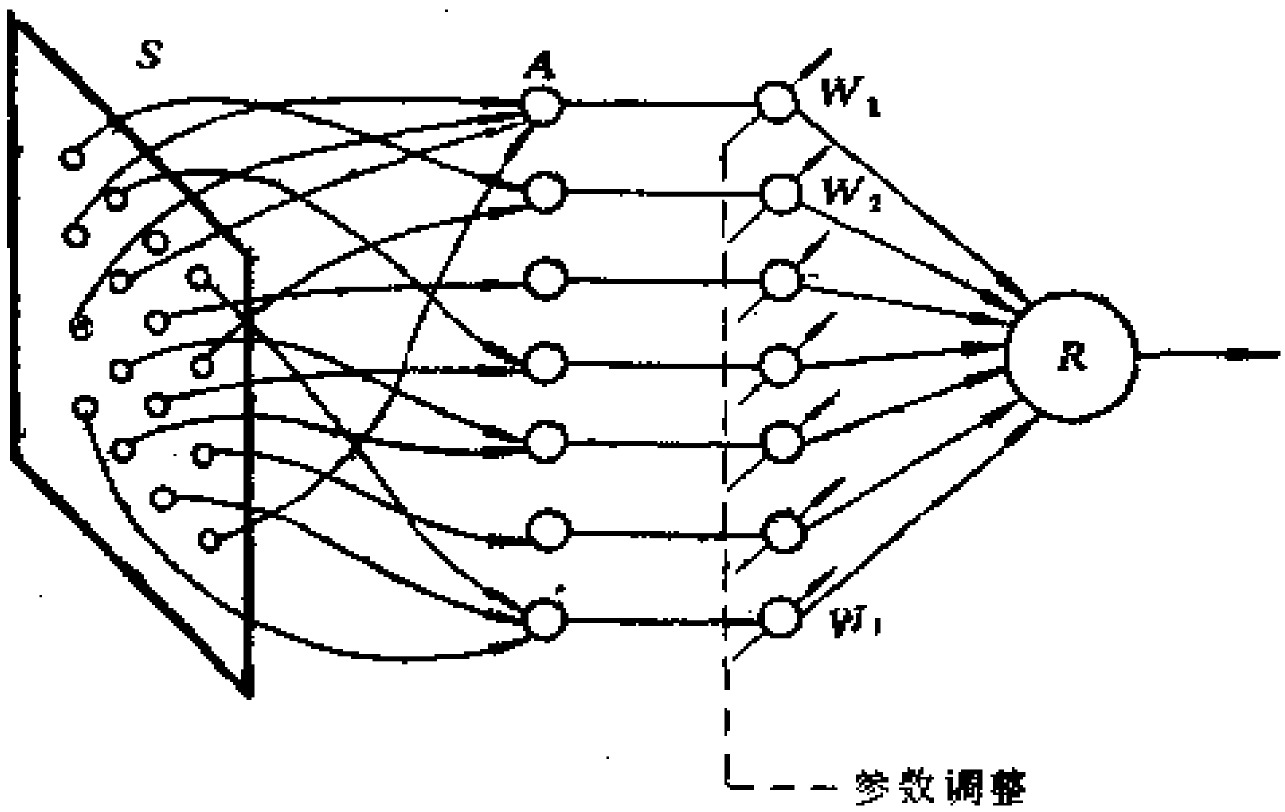


图 13-8 感知机

自雷森伯拉得的感知机以后，世界上有上百个实验进行类似的工作。

60年代中，有人根据小脑结构的特点，以及由小脑控制的技巧运动可以通过学习而改进的事实，提出了小脑皮层是一个特殊感知机的设想。在此基础上，迈雅(Marr)提出了“大脑新皮层”的理

论，这种理论假设大脑皮层具有均一性，并且是由基本操作组合起来的信息处理结构，可以根据过去的经验去形成分类单元，并用这分类单元去辨别周围事物，外界输入信息要经过编码，这个编码也要通过学习来完成。当然这种模型还只是一种初步设想，有待实验证明。日本中野馨在1972年研制成一种"联想机"，模拟脑在学习过程中联想记忆。70年代来，日本广播协会基础科学研究所视听研究室的福岛邦彦，在"认知机"的基础上提出了一个"新认知机"。这个模型也以图形(文字)作输入，采用"择优强化"学习法则，在经过几次学习以后，对于经过歪斜、放大、缩小等改变的图形，仍能正确辨认。这是一般图形识别机不易做到的。

总之，目前对脑模型和信息处理的研究已经取得了可喜的成果，但离开揭露大脑的奥秘还相差很远，脑和神经控制系统的研究仍是生物控制论中最重要的研究领域之一。

14 经济控制论

14.1 经济控制论的形成

控制论已被成功地应用于工程系统和生物系统，那么它是否也可以用于社会经济系统?这是人们共同关心的问题。事实上，控制论从它产生之时起，就已经提出了这个重大问题，在《控制论》一书中，维纳曾以保守的态度分析控制论运用于社会的可能性。以后，在《人当作人来使用》一书中，维纳把社会看成是一种信息、控制系统，认为控制论应当也可能用于社会系统。当然，维纳这里所指的社会是泛指社会的一切领域，不仅仅只是社会经济系统。环绕控制论应用于社会研究与管理的必要性和可能性问题，历史上曾引起激烈的争论。经过 30 年左右的实践，上述的必要性和可能性问题已经得到肯定，认识上也基本统一。

经济控制论是控制论用于社会系统中比较成功和成熟的一个分支，这一学科名称，大约产生于本世纪 60 年代。当时正是控制论风靡学术界的时代，许多学科都纷纷引入控制论，形成了许多新的分支，经济控制论就是其中之一。20多年来，这一新兴边缘学科吸引了大批不同领域的科学家，使得这一学科无论是理论和应用方面都有了很大发展，成为一门与社会经济建设和发展密切相关的重要学科。

与所有的边缘学科一样，经济控制论的产生和发展也是有着深刻的历史背景和思想渊源的。

早在古典政治经济学时期，人们已经关心和研究社会经济系统的调节和控制问题。例如，英国古典政治经济学家亚当·斯密斯曾经指出：自由市场的竞争是“受着一只看不见的手的指导，去达到一个并非他本意想要达到的目的。”在他以后的许多经济学家，

也在一定程度上认识到经济系统中的调节和控制作用。但大多数将其看成是自发地起作用。

马克思在《资本论》和其它一些著作中，深刻地揭示了社会经济过程中的自动调节与反馈的联系，主张用社会主义计划经济来自觉地调节国民经济的发展，并建立了再生产模式。本世纪30年代英国经济学家凯恩斯针对当时资本主义世界的周期性危机，提出了一套调节控制经济的理论，企图来缓解当时的经济危机。

控制论的诞生，提出了一般控制系统的理论和方法。它为研究社会经济系统提供了新思想和新方法，使得经济控制论的产生成为可能。从50年代开始，英美等国首先开始将控制论方法应用于社会经济系统的研究。例如，在1951～1953年期间，美国加利福尼亚大学的史密斯(O.T.Smith)教授就运用电子模似装置来模拟资本主义经济体系，分析研究了其稳定性和对各种干扰的反应。他认为用这种装置解决具体的和一般的经济问题是具有相当大的可能性的。然而，第一本将电子网络理论运用于经济调节与控制问题的专著，是英国电子工程学教授图斯丁(A.Tustin)于1953年发表的《经济系统的机制》。他用控制论方框图，信号流程图描述了凯恩斯关于投资、消费、收入之间关系的理论，被认为是经济控制论的创始人之一。1957年，德国慕尼黑出版了《经济调节过程与技术调节过程比较》论文集，收集了许多关于经济控制论的论文。

在控制论专著中，B·诺狄克是一位运用现代控制理论于经济问题研究的开拓者。他在1971年发表的论文中，建立了一个包括28个基本状态变量，3个控制变量(即超额税、政府支出、货币供应量)的美国经济模型。这一工作在经济学界产生很大影响。另一位由控制理论转入经济界的杰出代表是柏沙森(A.Bensoussan)，以他为代表的一批控制论专家认为，控制我们周围经济环境比控制飞船和导弹更有现实意义。经济理论对于控制理论来说是最有前途的发展方向。

以上我们论述了从控制论向经济领域扩展和渗透的情况。在

这个方面,控制论学者将控制论的基本概念、理论和方法,自觉地应用于社会经济系统的分析、调节和控制。然而,这仅仅是汇成经济控制论源流的一条分支。另一条分支是经济学家,特别是经济计量学家、数理经济学家吸取和运用控制论的思想和方法,开拓经济学研究的新领域。

控制论的一个显著特点,是广泛应用数学方法去研究各种系统。当然,经济控制论也要对经济系统进行定量的描述和处理。寻求最佳控制策略。事实上,在经济学中,这种基本的思想早已萌芽。在1676年英国古典政治经济学家威廉·配第(Willian Petty)的《政治算术》一书中,就试图用"数学、重量和尺度"来阐明经济现象。马克思称其为:"政治经济学之父,在某种程度上也可以说是统计学的创始人。"到19世纪下半叶,经济学中已开始大量运用数学方法。进入20世纪以来,经济计量学和数理经济学的形成和发展,使得对社会经济系统的研究更为系统化。

本世纪50年代,经济学家艾伦(R.G.D.Allen)撰写了《数理经济学》专著,他利用图斯丁所提出的方法,以方框图形式描述了几种闭环经济系统,系统地阐述了经济控制论的一些基本概念,着重研究了经济反馈系统和传递函数在经济领域里的应用。1957年,波兰的兰格(O.Lange)在《经济计量学导论》一书中,已经把线性规划、最优规划等数学理论用于经济系统分析。到1965年,兰格出版了一本名为《经济控制论导论》的专著,比较系统地阐述了控制论的基本概念、理论及其在经济学中的应用。它还吸取了冯·诺意曼关于可靠性的理论,将其应用于经济系统,研究了经济系统的效益问题。

自60年代以来,经济计量学和数理经济学不但研究静态和比较静态的最优经济效果及均衡问题,而且发展到研究大规模随机经济系统的动态最优化。因此,经济学家必然要吸取现代控制理论和大系统理论的理论和方法。这方面的杰出代表是美国普林顿经济计量研究中心主任邹致庄(Gregory.C.Chow)教授,他创立了一个用现代控制理论对动态经济系统进行分析和控制的理论

体系，他自70年代中期以来所做的工作重心侧重于微观经济分析[52,55]。

罗马尼亚前总理、经济控制论专家曼内斯库（M. Manescu）是从另一种意义上去理解和发展经济控制论的。他认为经济控制论是一门崭新的边缘学科，是经济学的新理论、新学说。它侧重于宏观经济系统的研究。为了区别于从数量经济学角度发展而来的经济控制论(Control theory of economy)，他们主张应从"控制论经济学(Cybernetie economic)"的涵义下来理解经济控制论[15]。而在另一种涵义下的一些研究工作，只能看作是开拓了数量经济学的领域，并没有在基本概念和观念上对经济学进行根本改造。

"控制论经济学"的上述观点，反映了目前关于经济控制论的二个不同体系，这也正是近年来环绕"经济控制论"辞义诠释的不同观点。关于"控制论经济学"的一些基本概念，我们将在下一节简要介绍。

从以上的分析可以看出，经济控制论是从控制论和经济学二个不同的源头出发的二条支流汇集而成。是这两方面有机结合的硕果，此外，经济控制论还与运筹学、信息论等学科有密切关系，此处不再论述。

目前，关于经济控制论尚未有统一的严格定义。一般认为它主要是控制论的基本概念，基本理论和方法运用于经济领域（包括经济活动和经济管理）而形成的一门边缘学科。它以各种经济系统的控制问题为自己的研究对象，它的基本理论包括经济信息理论、经济反馈理论，经济耦合理论、经济竞争的控制理论以及各种经济放大理论等等，它的运用范围极为广泛，随着控制论、经济科学以及新兴科学理论的发展，经济控制论的内涵必将更为充实和丰富，其前景是令人瞩目的。

我国在经济控制论方面的研究虽然起步较晚，但也取得了较多的成果。1980年11月，中国管理现代化研究会在北京召开了经济控制论学术讨论会，一些译著和专著也在近年里相继出版，越来越

多的控制论学者和经济专家加入了经济控制论的研究行列，可以相信经济控制论在我国的经济管理和经济改革中将会发挥巨大的作用。

14.2 经济控制论的基本概念

经济控制论的概念体系是比较宏大的，其中有许多概念系列是从控制论和经济学中派生得到的。本节中，我们不可能全面介绍经济控制论的基本概念，仅仅介绍几个具有特色和主要的基本概念。

根据参考文献[15]的观点，经济控制论的概念体系有三个层次，它们是基本层次、核心层次和展开层次。基本层次的重点在于经济系统、经济信息和经济控制等概念。核心层次的重点在于经济控制论系统和经济控制论法则；而展开层次则着重于以"结构-功能"的分析方法，对整个国民经济作系统的分类和描述。

关于系统、信息和控制的一般概念，在本书前文已作了介绍，在社会经济系统中的这些相应的概念，仅是一般概念的特殊化，对此不再阐述。以下将分别介绍曼内斯库学派关于经济控制论系统的有关概念及从计量经济学角度引伸而来的一些概念。

14.2.1 经济控制论系统

经济控制论系统是经济控制论概念体系的核心，它是由曼内斯库提出的。这一概念既是控制论、系统论与经济学结合的产物，又是经济控制论在"控制论经济学"涵义下的独特经济学概念。

显然，作为一个系统，经济控制论系统具有一般系统的特征；作为一个经济系统，它有一般经济系统的特征；作为一个控制系统，它又有控制系统的特征，但它是一个特殊的控制论系统。因此，经济控制论系统概念是上述各种系统概念的"交集"，我们必须从它的特殊性上去认识这一概念的实质，这些特殊性主要表现如下：

首先，经济控制论系统包含一个重要的本质特征：人的因素。如果从控制角度看，人在这个系统中扮演了二个不同性质的角色。

一方面，人作为决策者，自觉地直接参与这系统，于是人的主观性、目的性都会影响整个系统；另一方面，人又作为决策的执行者，作为一种控制执行因素参与系统，人自觉不自觉地执行决策和调节等活动。人的行为特征及人的心理因素也都会对执行控制产生影响。这同工程控制论中的情形是不同的。工程控制系统是按照人的设计而自动运行的，人们是以"旁观者"的身份来冷静考察和分析工程系统的。在社会经济系统中，人不得不卷入其中，不再具有"旁观者"的特殊地位。而且作为执行控制的因素，人不再具有控制机器的"机械性。"正如维纳在《控制论》第八章——信息、语言和社会中所说："在社会科学中，极难使被观察的现象和观察者之间的耦合减到最低限度。相反，观察者能够对他所关心的现象施展巨大影响。"这也是维纳最初对控制论能用于社会取保守态度的原因之一。

如果从经济角度看，人又是具有生产和消费双重功能的基本元素。人既是消费者，具有对生产提出目标并体现目标被实现的功能；人同时又是生产者或管理者，具有设计、指挥和执行生产和管理的功能。

总之，由于人的因素，使得经济控制论系统具有特殊的复杂性。这正是造成一切经济控制论系统具有反馈闭环性质的根本所在。如果我们研究的层次从微观经济逐步扩展到宏观经济，从单一过程上升到多级过程，那么所涉及的决策和执行因素将非常复杂。这些因素既可以起促进系统最优运转的作用，又可以起干扰甚至破坏的作用。

当然我们不能因为人的因素的介入而否定认识社会经济控制系统规律的可能性。按照辩证唯物主义的观点，世界上一切事物的发生、发展和死亡都是一种物质运动的过程，一切经济过程、社会过程、生物过程、心理过程以及思维过程都是可以认识、可以描述的。

经济控制论系统的第二个特征是：随机性、模糊性等不确定因素起着重要的作用。在研究这些系统时，往往要涉及一些非经济

因素，例如：政策、人口、外国行动、气候等等，这些因素一般具有不确定性。又如，在经济关系中，往往具有弹性的特点，例如，当国民收入增加时，某些商品的需求量会增加；但当收入减少时，其需求量也可能有一定的增加。由于经济系统这些特点，当它作为控制论系统研究时，其能控性、能观测性和稳定性的研究就更加困难。

第三，从经济控制论系统的结构上看，它具有复杂的结构。它可以包含许多子系统，每一个子系统由一些有序的相互联系的基本经济元素组成。各子系统体现了经济上的不同方面、不同层次、各自有相应的子目标，执行不同的子功能。因此，凡是具有某种直接的经济目标，能独立执行相应的经济功能的经济实体，都可以认为是经济控制论系统。一般地，它将是一个大系统，所以它具有大系统的各种特殊结构和特征，大系统的控制理论在经济控制论系统中广泛应用。例如，在经济控制论系统中，往往要考虑多目标优化问题。如既要考虑经济费用，又要考虑经济效益，而且还要考虑滞后效应。即经济控制论系统的整体效益往往要经过相当长的一段时间滞后之后，才能表现出来。

总之，经济控制论系统是包含人这个基本元素在内的复杂控制论系统。由于这种复杂的结构，使得经济控制论系统能够具备单个人所完全不具备的整体经济功能，并且对于不同的结构方式，执行的功能不同，运行的机制也不同，由此形成了经济控制论系统在质上的多样性。

14.2.2 经济时间和经济空间

与经济控制论系统密切相关的概念是经济时间和经济空间。它们有着特定的经济学内涵。

经济过程中的时间仅用一般的物理时间来描述是不够的。同样的经济活动，在相同的物理时间内，对于不同的时期来说包含着不同的国民工时量以及不同的工时效率。经济时间就要考虑到这种经济运行上的时间特征。另一方面，与物理时间的无限可分性也不同，任一经济活动必须在一定的持续时间中才具有经济意义。

描述经济活动的各种变量往往对应于一定的时间间隔。因此，经济活动的节奏性与持续性是不可分割的。在某一经济范畴的意义下，存在着最小的不可分割的时间单元。这个基本单元就成了经济时间单位。这个时间单位具有其相对性，对于不同的研究对象可以有所不同。正是由于这一“量子化”的时间单位特征，致使经济控制论系统往往被作为离散系统来处理。

因此，经济时间的概念包含了四层涵义：经济活动时间的同步性、持续性、节奏性和量子化不可分性。根据这四个特性，对于具体的经济控制论系统，可以确定相应的经济时间单位。

在考虑一个宏大的经济控制论系统时，往往要分析其中所运行的各种经济过程的最佳顺序、最佳同步关系以及最大限度地利用国民工时，发挥最大效率。由此，就产生了最优经济时间的概念；最优经济时间与经济时间的关系如图14-1所示。

例如，对重工业投资的资金周转一般要比对轻工业投资的资金周转慢，在这个意义上讲，这两个过程所要求的经济时间不同，最佳周期也不同。因此，它们的最优经济时间是不同的。又如，在制定经济发展计划时，究竟取多长的时期作为发展阶段，取决于对各经济部门的最优经济时间的综合考虑。

经济空间的概念是反映所有经济要素及其各种可能组合的一般方式，它可以看成是各种经济控制论系统的特征（输入、输出和状态特征）及其动态过程的参考媒介的一般表示。经济空间的概念具有经济内容和数学形式的双重涵义，与物理空间的涵义不同。它由经济控制论系统的状态向量空间、输入向量空间和输出向量空间的和集组成，如图14-2所示。

经济空间一般包含五种共同的经济物质——信息量即劳力、物资、能源、资金，信息，但是对于不同的经济控制论系统有不同的经济空间形式。上述五种经济物质——信息量的组合形式也不同。

由于经济时间和经济空间概念的建立，就为经济控制论系统的数学描述建立了时空坐标系。曼内斯库学派就是在这样的数学框架下，展开对经济控制论的研究的。

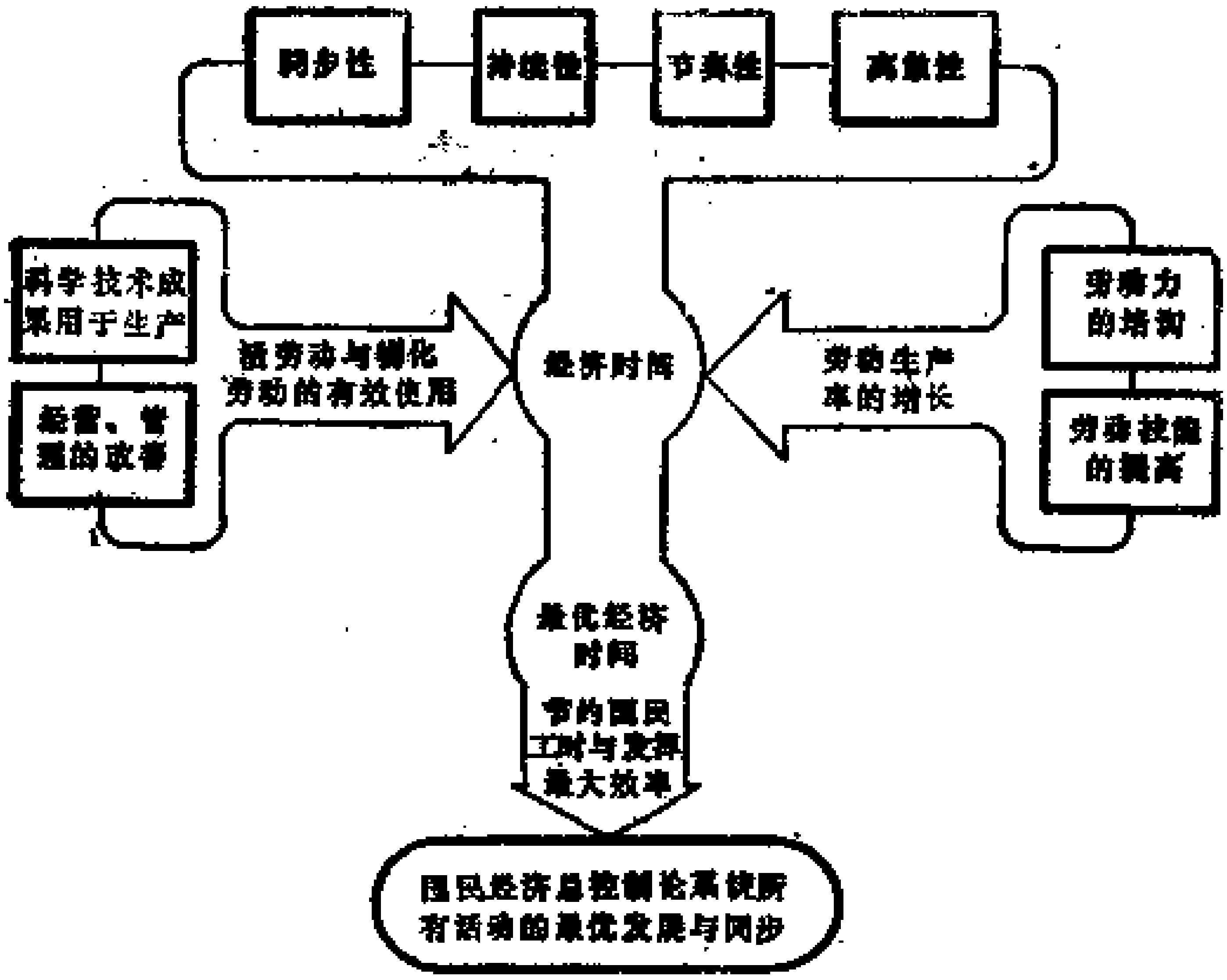


图 14-1 最优经济时间与经济时间的关系

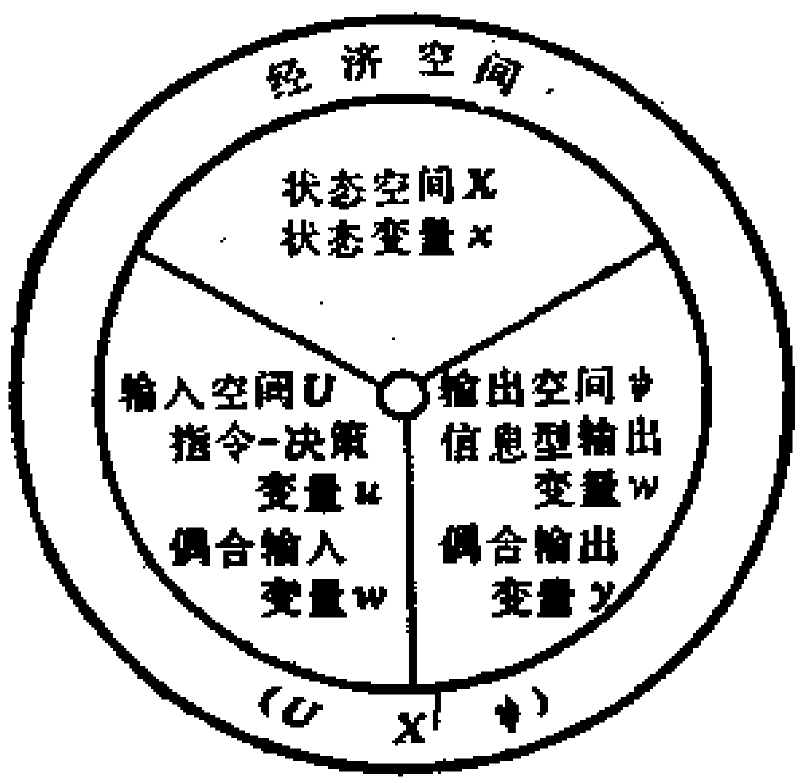


图 14-2 经济空间

14.2.3 计量经济模型概念

除了上述曼内斯库学派的观点之外，在经济控制论中也较多地采用了来自经济计量学中的概念。

经济计量学也称计量经济学，它的主要特点是把经济理论、数学和统计学三者结合起来，对各种经济关系式进行估算。它本身并不产生经济理论。经济计量学研究的主要内容包括五个方面：建立经济模型、估算参数、验证理论、预测未来和规划政策。

在经济控制论中，常常用到计量经济模型中关于变量的分类概念：内生变量、外生变量和滞后变量。

内生变量(Endogenous Variables)是由所研究的经济系统的内部因素所决定的变量，又称"经济变量"，它是模型的未知输出变量。

外生变量(Exogenous Variables)是由所研究的经济系统的外部因素决定的变量。对模型来说，它是已知的输入变量。例如，外国行动、人口、已执行的政策变量等。

上述各种变量都具有相对性，在一个模型中是内生变量，而在另一个模型中可能变成外生变量。滞后变量和外生变量，统称为先决变量。

利用上述各种变量可以建立经济数学模型，在计量经济学中，通常分为：行为方程、技术方程、制度方程和定义方程等等。

14.3 建模与控制

建立适当的模型并实现最优控制是经济控制论研究的核心问题。经济系统不同于工程或生物系统，有其特殊之处，因此，它的建模和控制也具有某些特征。

14.3.1 建模的一般程序

经济控制论在建模上有二个并行的方向：一是建立定性模型，二是建立定量分析模型。这二类模型各有所长，是同等重要的。在

模型的分类标准上，主要有以下六种：模型所涉及的领域或范围，模型的组成要素，模型的状态，经济控制论在模型中所表现的特征，模型的适用期和模型的量化程度。例如，从模型所涉及的范围来分，有宏观经济模型和微观经济模型。从模型的特征来分类，可以分成：结构模型，即反映内部关系的模型，如投入-产出模型；行为模型，即反映流经各系统的经济物质——信息流的种种变化模型；功能模型，反映被模似系统对其他系统的作用模型。

曼内斯库提出了经济控制论系统建模的一般程序，程序的框

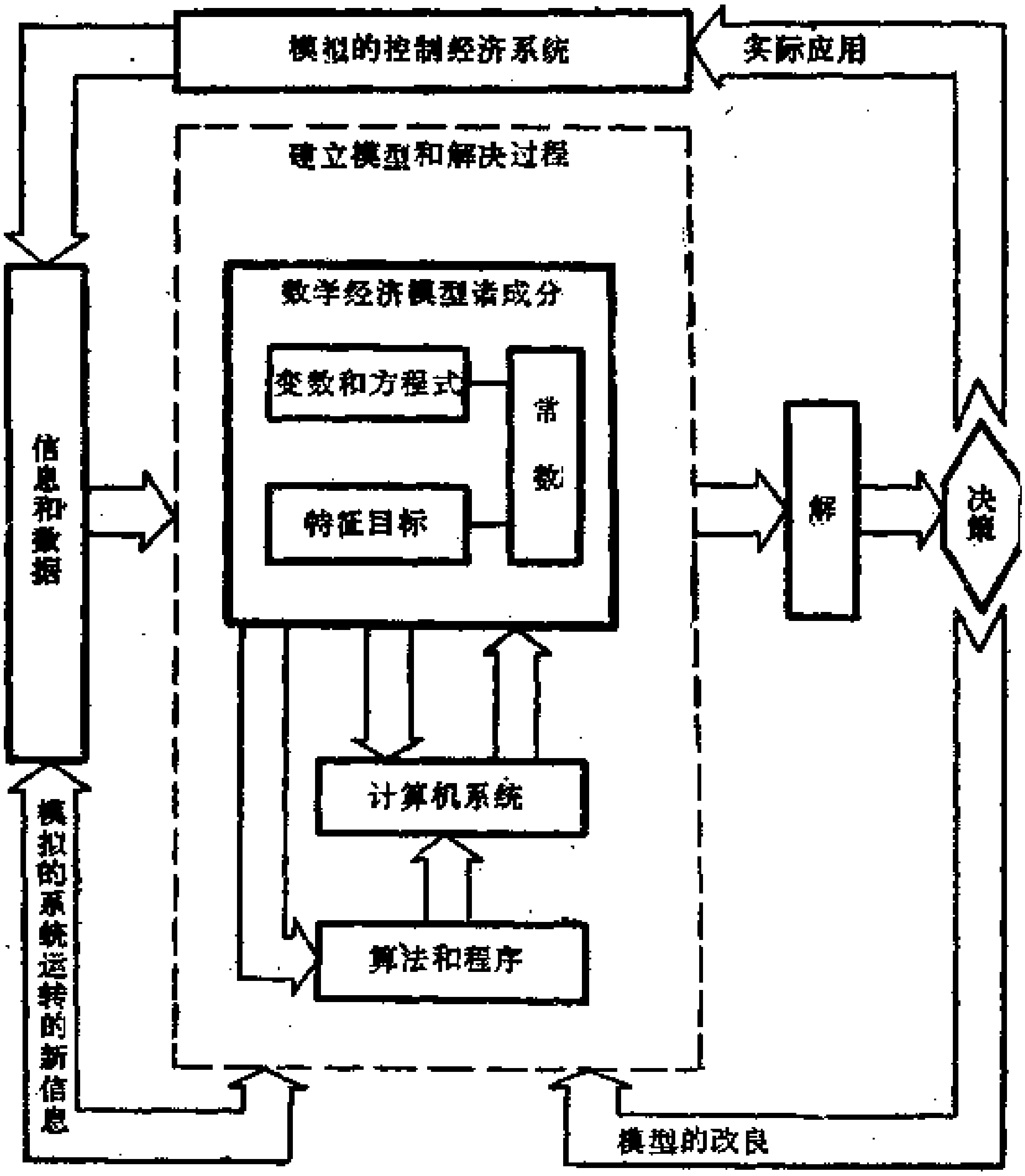


图 14-3 建模的一般程序

图如图14-3所示。

曼内斯库认为，通常一个模型的制作过程表现为一组三元体$\{A.S.M\}$，A是原系统，主体S在模型M的帮助下对A进行研究。模型的制作可分为三个不同的阶段：第一阶段，向模型M传递所有关于被分析系统A的已知信息；第二阶段，在已知的科学工具帮助下对模型M进行研究，获得关于系统性能的新信息；第三阶段，通过研究模型和在实践中使用模型获得新信息输入模型系统A。

经济模型的建立，通常是从建立定性模型入手，首先把被分析的系统与一定的研究主题对应起来，从而概括出定性描写系统的各种性质：$P_1(A)$，$P_2(A)$，…，$P_n(A)$。这些性质包括：有关经济物质——信息的性质（如人力资源、财政收支、工资、价格、利息等等）；有关经济学范畴的性质（如劳动生产率、效率、盈利率等）；有关经济控制论系统的性质（如元素之间、子系统之间的联系特征）。所有性质的总和及其联系构成了经济控制论系统的定性模型。

在定性模型的基础之上，采用各种数学方法（如统计方法等）将定性模型中的部分性质定量化，并利用计量经济学方法和最优控制理论确立各性质和变量之间的定量关系。例如，可确定行为方程、制度方程、技术方程等等，从而初步建立定量的经济模型。

经济模型的建立并不是一次完成的，是需要经过多次修正和检验后才能最后确定。正如在系统辩识中所介绍的那样，需要经过“模型验证。”利用新的信息和统计数学方法可以来检验模型的有效性。

14.3.2 几种典型的计量经济模型

比较著名的经济数学模型有线性生产模型、供求均衡模型和生产函数模型。以下分别作一简单介绍。

在线性生产模型中，列昂节夫模型应用最广泛。列昂节夫模型是一种投入-产出模型。所谓投入是指在进行物质生产之前，所需投入的生产性消费，如购买原材料、燃料、电力、机器设备及人力等等；所谓产出是指产品的生产及其分配使用。各部门间在投入

和产出上，存在着极为密切的生产技术联系和经济联系，形成了复杂的网络。列昂节夫研究了这种复杂的网络，并用简单的图表——部门平衡表来说明。假定整个国民经济划分为 n 个"纯部门"，即每一个这种部门的产品都是单一的，不同部门生产不同的产品，并且每个部门在生产过程中都至少需要其他部门的一种产品。根据某一时期内的统计资料，可以编制出生产部门、总产品和总需求之间的平衡表，利用这种平衡表，列昂节夫导出了简单的线性数学模型，其形式如下：

$$x - xA = C。$$

其中 x 表示总产品矢量，$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$；$C$ 表示最终需求矢量，$C=(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ c_i 表示部门 i 用最终需求的产品比重；$A=(a_{ij})$ 称为直接消耗系数矩阵或工艺技术矩阵，元素 a_{ij} 称为直接消耗系数，它表示生产部门 i 的单位产品所需要的部门 j 产品的投入量。矩阵 A 描述了部门间生产的依存关系和该生产系统在某时期内的工艺技术状况。把不同时期编制的这种矩阵加以比较，可以看出工艺技术的变化和发展方向。

列昂节夫模型给出了在最终需求矢量已定的条件下求解总产品矢量 x 的方程式。如果对任何最终需求矢量 C 都存在一个解矢量 x，$(x_i \geqslant 0)$ 我们称列昂节夫模型是有效的。容易证明，当矩阵 A 的特征值 λ_A 小于 1 时，列昂节夫模型是有效的。

列昂节夫模型是一种静态模型，当考虑综合生产部门的动态模型时，需要建立诺依曼模型和盖伊尔模型，列昂节夫模型仅是它们的特例。诺依曼模型和盖伊尔模型也都是线性模型，对此我们不作详细介绍。

在上述生产结构的数学模型中，把消费也看作生产过程的组成部分纳入这些模型。但是个人消费毕竟是经济体系中一个很特殊而重要的组成部分，需要单独研究。为此需要建立新的经济数学模型——供求均衡模型。这类模型最初由华乃斯创立，称为华乃斯模型。

华乃斯模型是华乃斯于 1874 年在《抽象经济学原理》一书中

指出的，它是历史上最早的一批数理经济模型，构成华乃斯模型的核心概念是竞争均衡概念。个人消费是华乃斯模型的重要成分，它假定作为消费者的每个人拥有一定量的收入，并把它投入商品市场，华乃斯从合理分配个人收入的角度来考察个人的消费行为。

假定社会经济体系由生产者和消费者两部分组成，消费者在受到预算限制的条件下，力图使挑选到的产品能最大限度地满足需要。生产者是为了追求生产上的最大利润。因此，无论是生产者还是消费者，都在一定限制条件下追求某个目标函数的最大值。目标函数和所有限制条件，都与该体系中的商品和原始要素(它是由劳动、土地等属于消费者的不是由生产部门生产出来的东西组成，是消费者的财产)的价格有关。

如果每个参与该系统经济活动的人都不得不接受现有的价格体制，同时，每个人的能力并没受到价格体制的影响，又假定生产和消费双方都以对自己有利的方式来行动，双方都受预算的限制，对每一种产品和要素的要求都不超过供给的数量。在这种情况下(满足约束条件)使双方都得最大利益的价格称为均衡价格。华乃斯模型给出了均衡价格矢量的一组关系式。它的数学描述需要一些专门的知识，此处不再介绍。华乃斯模型的根本问题是均衡状态的存在性问题。华乃斯只是在最简单的情况下证明了存在性，对于一般情况下的存在性问题。是在 50 多年后由苏联学者阿什马洛夫所解决。

生产函数模型是从"黑箱"的观点来研究经济系统，它把生产经济系统看作"黑箱"，只研究投入的资源和产品之间的联系。也就是从输入-输出关系上来研究系统，这样使问题的处理更为简单。

假定矢量$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$表示原始要素和原材料的投入矢量，投入矢量空间记为$R_+^n$；产出的产品矢量记为$y=(y_1, y_2, \cdots, y_m)$，产出矢量空间记为$R_+^m$。若$S$表示生产过程，那么代表过程$S$的生产函数$F$是将$R_+^n$的某子集$D$映射到$R_+^m$中的某子集$V$，即$F: D\to V$, $D\subseteq R_+^n$, $V\subseteq R_+^m$。通常投入矢量仅局限于固定资产、劳动等原始要素，而不包含原材料投入矢量，产出矢量一般仅是总产值、

国民收入等单一"产品"。因此，生产函数可表示为多元函数形式：

$$Y = F(x_1, x_2, \cdots, x_n)。$$

若用K表示固定资产投入量，L表示劳动量，那么二元生产函数可表示为$Y = F(K, L)$，一般要求$\frac{\partial F}{\partial L}>0$、$\frac{\partial F}{\partial K}>0$、$\frac{\partial^2 E}{\partial L^2}<0$、$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2}<0$、$K>0$、$L>0$。最常用的二元生产函数是柯布-道格拉斯函数：

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}。$$

其中，$A>0$，$0<\alpha<1$，$0<\beta<1$，$\alpha+\beta=1$。

从生产函数出发可以得到一些经济指标。若K、L均与时间t有关，那么需要考虑动态生产函数，其形式为：

$$Y(t) = F[K(t), L(t), t]。$$

生产函数的设置是一个非常复杂的问题，一般可分为以下四个步骤：

(1) 确定影响生产的资源种类(设置R_+^n)；

(2) 对产出进行分类(确定R_+^m)；

(3) 选定生产函数的定义域D；

(4) 选择生产函数的形式，并确定该函数的各种参数。

目前，关于生产函数的理论研究已开展了大量的工作，最初只讨论生产过程本身，然后在模型中考虑消费因素，进而研究生产所引起的环境污染问题，还要研究科技、文化教育对生产发展的影响及科技投资效果，确定社会产品中用于科学研究和智力投资的合理比重等具有重大意义的问题。在生产函数的基础上，最优控制理论被广泛应用。

14.3.3 经济系统的控制方法

经济控制系统是一类特殊的控制系统，因此对于一般控制系统适用的控制原理和方法，原则上都可以应用于经济控制系统。在本书前文所介绍的最优控制、随机控制、模糊控制及大系统控制的理论和方法，原则上都可以用于经济系统的控制。但是，由于经济系统的特殊性，使得经济系统的控制问题也具有某些特殊之处。

首先在经济系统最优控制问题的提法上，具有一些特点。例如，对于宏观经济系统而言，控制的目的在于实现高速度发展的社会经济，将国民经济的发展控制在最优、平衡、按比例增长的轨道上。所谓"最优"是在经济效益的涵义下实现系统的优化控制，所谓"平衡"是指控制的稳定性和适应性，所谓"按比例"是指控制的统筹协调作用。对于微观经济系统而言，控制的目标通常是最大收益和最小耗费。

其次，由于经济系统模型既有定性模型，又有定量模型；既有确定性，又有随机性和模糊性。因此，确定控制策略的方法将具有多样性，定量和定性方法将相互结合；在研究方法上，将具有"软科学"方法和"硬科学"方法结合的特点。这种特点使得确定经济控制系统的最优控制策略更为困难和复杂。

另外，经济控制系统一般是大系统，大系统中的分解-协调原理和分散控制方法将被广泛应用。经济控制系统中的滞后效应也往往比较明显。控制作用的效果往往将经过较长的时间才能表现出来。这与工程控制系统有明显的差别。

经济控制系统一般都是非平衡系统，从空间看，产业之间、部门之间、地区之间的经济发展是不平衡的；从时间看，经济发展的速度是非均匀的，有规则的经济波动和无规则的随机变化相互影响，造成经济发展过程中的涨落现象。对于这种非平衡经济控制系统的控制策略，将更为复杂。这也是急待研究的经济控制论的新课题。

以曼内斯库为首的罗马尼亚学派和以邹致庄教授为首的学派，分别从不同的角度研究了经济控制系统的最优控制问题。前者着重于宏观经济系统研究，后者侧重于微观经济系统的研究，两者各有特色，相互补充，目前都形成了很盛的发展势头。

14.4 应用举例

本节将介绍三个典型的经济控制论系统，即曼内斯库的国民经济总控制系统，根据计量经济理论建立的密执安经济模型和利

用最优控制理论求解的最优库存问题。

14.4.1 国民经济总控制论系统

曼内斯库提出了国民经济总控制论系统框图，这是一个用于定性分析的框图模型。

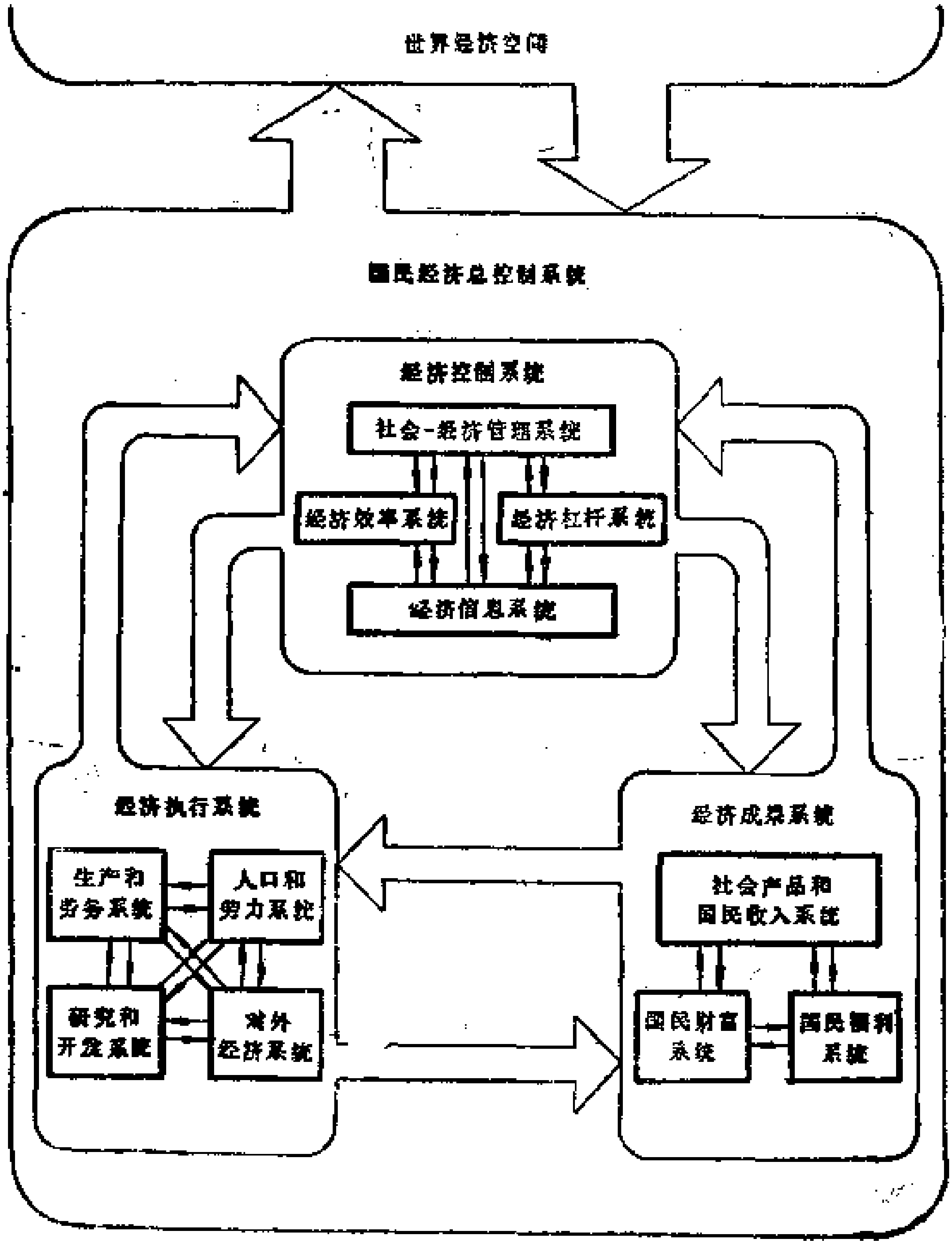


图 14-4 国民经济总控制系统

在这个系统中，把国内的整个国民经济综合成为一个独立的特大系统，即国民经济空间，而把世界经济综合成为一个特大系统，即世界经济空间。

国民经济总控制论系统可分为三个大类：经济控制论系统，经济执行系统和经济成果系统，见图 14-4。

经济控制系统的功能是协调国民经济空间中所发生的所有活动以确保各级社会-经济目标的实现。它的中心部分是社会-经济管理系统。经济执行系统的功能是完成实际的经济活动，这是指狭义的生产、经济系统。其中主要的经济活动是生产、劳务、流通和科研。这类系统的中心部分是生产和劳务系统。经济成果系统的功能是把社会-经济领域内的成果转化为经济-社会领域内的成果，最终实现国民经济空间中的社会-经济发展的各项目标，它主要分为社会产品和国民收入系统、国民财富和国民福利系统。

14.4.2 密执安经济模型[53,31]

密执安经济模型是又一个著名的宏观经济模型[31]。它是根据计量经济理论，使用反馈控制理论建立起来的大规模非线性随机模型。它被用来分析和制订美国的国家经济政策，其结构方程如下：

$$y_t = \Phi(y_t, Y_{t-1}, k_t, u_t) + e_t。\qquad (14\text{-}1)$$

式中，y_t 为内生变量，是模型本身所决定的输出变量在 t 时点上的向量值；y_{t-1} 为滞后内生变量，是在上一个时点上的输出变量的向量值；k_t 是在 t 时点上的控制变量，即政策变量的向量值；e_t 为具有零均值和全部时间内独立分布的随机干扰向量；u_t 为外生变量，不受控制影响的输入向量。角标 t 为时点序列(即季度数) $t=1,\cdots,T_t$。Φ 是非线性的向量函数，其分量是单调函数。性能指标取为如下形式：

$$J = \sum_{t=1}^{T_t}(y_t - a_t)^T K_t (y_t - a_t)$$

$$= \sum_{t=1}^{T} (y_t^T K_t Y_t - 2y_t^T K_t a_t + a_t^T K_t a_t)。\quad (14\text{-}2)$$

式中，a_t 为目标值，"T"为转置的符号。

解此问题，就是从该模型中推导出政策变量 k_t 的最佳选择路径，通常是用高斯-塞得尔(Gauss Siedel)迭代法，即控制变量迭代法，是在数字机上求解的。首先令随机扰动 e_t 等于它的期望值零，即可把T_1个时期(季度)的随机控制问题化为确定性控制问题。由于把长时期的性能指标函数看作是已给定的确定性经济模型的 $k_1, \cdots, k_T$ 的函数，我们可以把它作为对政策路径 $k_1, \cdots, k_T$ 的无约束最小化问题求解。

解法步骤如下：

(1) 令式 14-1 式中 $e_t = 0$，将假设的试验性政策路径(各季度的政策变量值)$k_1{}^\circ, \cdots, k_T{}^\circ$ 和已给出的 $y^\circ{}_{1-1}, y^\circ{}_{2-1}, \cdots, y^\circ{}_{T-1}$ 及输入变量 $u_1, \cdots, u_T$ 等代入之，可得路径 $y_1{}^\circ, \cdots, y_T{}^\circ$ 之解为：$y_t{}^\circ = \Phi(y_t{}^\circ, y^\circ{}_{t-1}, k_t{}^\circ, u_t{}^\circ)$。$t = 1, 2, \cdots, T$。

(2) 将方程式 14-1 在点 $y_t{}^\circ$, $y^\circ{}_{t-1}$ 和 $k_t{}^\circ$ 附近线性化得：

$$y_t = y_t{}^\circ + B_{1t}(y_t - y_t{}^\circ) + B_{2t}(y_{t-1} - y^\circ{}_{t-1})$$
$$+ B_{3t}(k_t - k_t{}^\circ) + e_t。\quad (14\text{-}3)$$

其中，B_{1t}、B_{2t}、B_{3t} 的第 ij 个元素分别是式 14-1 中的 Φ_i 对y_t、Y_{t-1} 和 k_t 第 j 次元素的导数。

(3) 解线性方程式 14-3，就可得到线性化的状态空间模型(即经济学家术语中的简化式方程)：

$$y_t = A_t y_{t-1} + C_t k_t + b_t + E_t。\quad (14\text{-}4)$$

式中，E_t为附加随机扰动。

$$(A_t; C_t; E_t) = (I - B_{1t})^{-1}(B_{2t}; B_{3t}; e_t),$$
$$b_t = y_t{}^\circ - A_t y^\circ{}_{t-1} - C_t k_t{}^\circ。$$

(4) 利用具有附加随机扰动 E_t 的线性模型(式 14-4)和二次性能指标函数(式 14-2)，用参考文献〔64〕中提出的计算方法，可算出最优线性反馈方程如下：

$$\dot{k}_t = G_t y_{t-1} + g_t。\tag{14-5}$$

(5) 解式14-5可得新的试验性政策路径$k_1{}^1\cdots, k_T{}^1$。再令式14-1中的$e_t = 0$，将$k_t{}^1$和已知量y_{t-1}和u_t代入之，可求得路径$y_1, \cdots, y_T$之解。

(6) 返回步骤(2)，反复进行(2)～(5)步，直到该过程收敛为止。在逐次迭代中(如y_{it}的逐次试验值是振荡的)可以引入一个0～1间的阻尼因子来阻尼从一次迭代到下一次迭代的每个$\hat{E}_{1f}$的变化，从而加快收敛性。

(7) 处在控制过程中的随机系统用式14-4和式14-5近似地描述，即

$$\begin{aligned} y_t &= (A_t + C_t G_t) y_{t-1} + (b_t + C_t g_t) + E_t \\ &= R_t y_{t-1} + r_t + E_t。\end{aligned}$$

通过一系列的迭代，可以算出该系统的协方差矩阵与在T时期中所期望的总损失。据此而找出最佳的政策路径来。

文献[53]介绍了应用密执安季度模型，对美国经济从1971年第1季度到1975年第1季度的十七个季度，进行了最优控制计算，并把计算出的最佳路径同该时期的历史数据相对比。该文分析说，利用这个模型来控制美国经济，可以减小国民生产总产值的实际值与目标值之差，降低失业率，同时也可在一定程度上控制通货膨胀。

除了密执安模型之外，颇有成效的著名经济控制系统模型有：美国的Wharton季度计量经济模型、布鲁金斯模型及日本的大阪模型等等。其中Wharton模型曾经准确地预测到美国1969～1970年的经济衰退。

14.4.3 最优库存问题

设某厂的生产量为$u(t)$，市场对此厂产品的需求量为$D(t)$，库存量为$x(t)$。$x(t)$与$u(t)$、$D(t)$的关系为：

$$\dot{x}(t) = u(t) - D(t),\tag{14-6}$$

这就是状态方程，其初值条件为

$$x(0)=x_0。\tag{14-7}$$

需求量 $D(t)$ 与生产量 $u(t)$ 之差额平方越大，则经济损失越大。设其权重系数为 C_1，当 $D(t)>u(t)$ 时，这种费用主要是缺货的损失；当 $D(t)<u(t)$ 时，这种费用主要是处理过多产品的代价。设库存量的所欲水平为 $\bar{x}(t)$，我们也可以设 $\bar{x}$ 为一常数或等于 0。$x(t)$ 与所需水平的差额之平方越大，则费用也越大，其权重系数为 C_2。当 $x(t)>\bar{x}(t)$ 时，这种费用主要是库存费用；当 $x(t)<\bar{x}(t)$ 时，费用主要是缺少库存承担的缺货风险代价。我们的目的是要求总费用在 0～T 时期内最小化，即目标泛函为：

$$\min\int_0^T\left\{C_1[u(t)-D(t)]^2+C_2[x(t)-\bar{x}(t)]^2\right\}dt,\tag{14-8}$$

约束条件就是状态方程式 14-6 及初始条件式 14-7。

由最小值原理，哈密尔顿函数为：

$$H=C_1(u-D)^2+C_2(x-\bar{x})^2+\lambda(u-D),\tag{14-9}$$

必要条件为

$$-\frac{\partial H}{\partial x}=\dot{\lambda}=2C_2(x-\bar{x}),\tag{14-10}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda}=\dot{x}=u-D,\tag{14-11}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}=2C_1(u-D)+\lambda=0\tag{14-12}$$

从式 14-12 可解出

$$u=D+\frac{\lambda}{2C_1},\tag{14-13}$$

代入式 14-11，则

$$\dot{x}=D+\frac{\lambda}{2C_1}-D=\frac{\lambda}{2C_1}。\tag{14-14}$$

联立式 14-14 和式 14-10：

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=\frac{\lambda}{2C_1},\\ \dot{\lambda}&=2C_2(x-\bar{x})。\end{aligned}\right\}\tag{14-15}$$

我们可视上式为一状态方程，若所需库存水平 $\bar{x}=0$，则状态方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{\lambda}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2C_1}\\ 2C_2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \lambda\end{bmatrix}。 \tag{14-16}$$

设其解为

$$\left.\begin{aligned}x&=K_1e^{\frac{1}{C_1}t}+K_2e^{C_2t},\\ \lambda&=K'_1e^{\frac{1}{C_1}t}+K'_2e^{C_2t}。\end{aligned}\right\} \tag{14-17}$$

将其对 t 求导数，则

$$\dot{x}=\frac{K_1}{C_1}e^{\frac{1}{C_1}t}+C_2K_2e^{C_2t}=\frac{\lambda}{2C_1}=\frac{1}{2C_1}(K_1'e^{\frac{1}{C_1}t}+K'_2e^{C_2t}),$$

$$\dot{\lambda}=\frac{K_1'}{C_1}e^{\frac{1}{C_1}t}+C_2K_2'e^{C_2t}=2C_2x=2C_2(K_1e^{\frac{1}{C_1}t}+K_2e^{C_2t})。$$

比较等号两边同类项的系数，则可解出

$$\left.\begin{aligned}K_1&=\frac{1}{2}K'_1,\\ K_2&=\frac{1}{2}K'_2。\end{aligned}\right\} \tag{14-18}$$

于是通解可写为

$$\left.\begin{aligned}x&=K_1e^{\frac{1}{C_1}t}+K_2e^{C_2t},\\ \lambda&=2K_1e^{\frac{1}{C_1}t}+2K_2e^{C_2t}。\end{aligned}\right\} \tag{14-19}$$

常数 K_1, K_2 由初始条件和右端点条件 $\lambda(T)=0$ 确定。$\lambda(T)=0$ 意味着在终端时刻T，库存变化率的"影子价格"为零，协状态变量 $\lambda(t)$ 反映了价格变化率对总利润的影响，称它为动态"影子价格"，即不管库存量怎样调节，都不能使目标泛函极值再减少一点。将式 14-19 代入式 14-13，则最优生产计划为：

$$u=D+\frac{1}{C_1}(K_1e^{\frac{1}{C_1}t}+K_2e^{C_2t})。 \tag{14-20}$$

当所需的库存水平 $\bar{x}(t)$ 不为常数时，这时就要求解非齐次线

性微分方程式14-5。若采用"线性决策法则"可以简化求解过程。

设动态影子价格 $\lambda(t)$ 可以表示为 $x(t)$ 的线性函数，即：

$$\lambda(t)=a(t)+b(t)x(t)。\tag{14-21}$$

由此可得：

$$\dot{\lambda}(t)=\dot{a}(t)+\dot{b}(t)x(t)+b(t)\dot{x}(t)。$$

将式14-15代入上式得：

$$\dot{a}+\frac{ab}{2C_1}+2C_2x-\left(2C_2-\frac{b^2}{2C_1}-\dot{b}\right)x=0。$$

因为上式对任意 t 成立，所以可得：

$$\dot{a}+\frac{ab}{2C_1}+2C_2\bar{x}=0,\tag{14-22}$$

$$\dot{b}+\frac{b^2}{2C_1}-2C_2=0。\tag{14-23}$$

由 $\lambda(T)=0$ 可得边界条件为

$$a(T)=b(T)=0。$$

由式14-22和式14-23可知，a、b 均与 x、u、λ 无关。由式14-13可得：

$$u(t)=D+\frac{1}{2C_1}[a(t)+b(t)x(t)]。\tag{14-24}$$

上式表明，最优生产计划由两个因素调节，一个是需求，另一个是当时的库存水平 $x(t)$。式14-24给出了当 $\bar{x}(t)$ 不为常数时的最优产量计划。

以上介绍的是最优库存问题中的一个典型例子。在库存问题中还有一些著名的公式和模型，如威尔生(Wilson)批量公式。在这个公式中，需求量为不变常数，最优库存量也是不变常数，即：

$$x^*=\sqrt{\frac{2C_3D}{C_1T}}。$$

其中 x^* 为最优库存量，C_1 为单位产品单位时间的库存费用，C_3 为每批产品的订货费用，D 为总需求量，T 为所考虑的时间长度，x^*、

C_1、C_3、D、T都是常数。威尔生公式主要考虑了定货费用和库存费用之间的矛盾，即定货次数越多，则总的定货费用越多，库存费用越少；而定货定数少，则总定货费用少，但库存费用上升。最优化的目的是兼顾定货费和库存费两个方面，使其总和最小。

在库存问题中，还需要研究库存费用随时间变化和（或）存在随机干扰的情况，此类问题是动态最优库存问题和随机最优库存问题，它们的求解将更为复杂，本书中不再详述，读者可参阅文献〔16〕。

15 智能控制论

创造出"智能机器"或"会思维的机器"这类激动人心的想法已有相当悠久的历史了。在这漫长的历史中，无数的科学家曾为之顽强奋斗，然而，对于其活动范围远离控制论的许多人说来，上述具有神秘色彩的问题使他们困惑不解。人们对这类问题广泛地从学术、技术以及观念上展开了热烈的议论和争论。这类问题成了人们最关心的科学问题之一。

在结束本书之前，想以一章的篇幅来探讨这个十分重要而又有趣的问题。这个问题正是控制论发展的高级阶段——智能控制论。

15.1 智能模拟

什么是人的智能？它是推理的能力吗？它是获得知识和运用知识的能力吗？它是加工和交换思想的能力吗？当然，所有这些都是智能的一部分，但它们并不是所谓智能的全部内容。给智能下一个一般定义，是困难的，甚至是不可能的，因为智能似乎是一个包含着许多信息处理和信息表达技能的混合体。

关于智能可以大致归结为以下二点[6]：第一，智能是理解能力和其他形式的自适应行为的能力；第二，智能是接受或传送事件和事情等方面的知识、新闻和信息的能力。人工智能专家福格尔(Fogel)[55]认为："知识和智能的区别非常明显：知识是一个人积累的有界信息，而智能是一个人有目的地以某种很好的方式使用这个有用信息的能力。"他还认为智能可定义为："在各种复杂的条件下，为成功地达到某一目的而作出决断的能力"。

从控制论的角度看，人们关心的是智能的人工模拟，也就是将人的智能引进控制系统，形成高级控制系统——智能控制系统。这

里所谓的智能是指人工智能，因此，有的学者认为人工智能是控制论的实质。对此虽有不同看法，但对人工智能作为智能控制的主要途径这一点上是共同的。

于是又有一个新的问题产生了：机器能具有智能吗？或者说，计算机能具有智能吗？当然，这个问题与“智能是什么”的问题密切相关。持反对或赞成意见的人分别进行了论证[6]。

一种意见认为，若思维是人类独有的能力，智能是人类独有的属性，那么根据这种观点，这种独有的能力和属性就不可能属于计算机、或别的任何人造系统。这是一种对机器具有智能持悲观态度的观点。有这种观点的代表人物是美国的休伯特·德雷福斯(Hubert. L. Dreyfus)，他在1979年所写的《计算机不能做什么——人工智能的极限》一书中，系统地论述了什么是计算机做不了的事情，并且全面地否定了人工智能。

另一种意见认为，若在计算、加工、决定、判断和用于创造机器智能的思维等能力上，存在某种基本的物理限制的话，那么这些限制同样也一定会施加在人类智能上。这就是说，由普遍的自然规律决定的任何理论上的限制，对于人和机器两者都必定普遍适用。这种论证同智能的本质是神秘的格言显然是背道而驰的。这是一种对机器能具有思维或智能持乐观态度的观点。他们认为，在不远的将来，终究可以造出与人的智能相当的智能机器。数学家和计算机科学家图灵(Turing)就是持这种观点的代表。他设计了一个有趣的实验，借以表明一台什么样的机器可以算是“思维机器”。这种尝试是通过所谓的“问答游戏”进行的。他的这种想法，也许起源于晚会上的一种游戏，这游戏要求某些客人悄悄躲到另一间房屋里去，然后请留下的客人向这些藏起来的人提问题，并要他们根据得到的回答来判定跟他对话的是一位先生还是一位女士。当然回答必须是间接的，借助于一个中间人联系。

图灵由此想到，同样可以通过与一台据称有智能的机器“对话”来测试这台机器是否真有智能。“对话”可以通过电传打字机之类的设备来进行。如果人们通过提问题能可靠地确定是机器还是

人在回答他的问题，则人们就会对机器能具有智能、或者能呈现像人一样的智能产生怀疑。相反，如果提问者无法判定与之交谈的是一台机器还是一个人，而实际上是一台机器在与之交谈，那么就可以认为这台机器是具有了"智能"。

现在的计算机程序可以认为已通过了某些简单的图灵测试。有一个名称为ELIZA的著名程序，它能扮演精神病医生的角色，"求诊"于这一"精神病医生"的病人中常有人确信这是一位医生，而不是一个程序。

持乐观态度的人还认为[6]：人的生物学组织以及行为的自适应能力，都是由自然和人的全部经验所赋予的，正是由于这个生物学组织和行为的自适应能力，才使人有了思维和智能这样独一无二的本领。因此，人的基本的内在特性是与他的经验所带来的变化相联系的，这样的内在特性就能赋予人一种适当的"程序"，以便使他在环境中获得良好的成绩。所以，西蒙(Simon)认为[56]，如果一台计算机会思维、学习和创造，则它应具有不应与人的程序有任何差别的程序，于是人们希望，有朝一日能创造出这种"程序"。

除了上述二种对立的观点之外，目前，大多数计算机科学家似乎持一种折衷的态度，认为计算机在不久的将来可以取代人的智能所能做的许多事情，但最终并不能代替人。

上面所介绍的ELIZA程序并不是图灵原来设想的情况，即由程序去模拟能随时就各种话题发表见解的具有整体功能的人。这个程序的功能是有限的，它只是模拟一个医生如何避免向病人透露信息而引起病人的"预感"。在这个方面很像一位精神病医生。而且，人有时会故意不表示出智能来，这就使图灵的测验难以得出明确的结果。

人工智能是一个正在广泛讨论和争论的问题。由于它具有非常丰富的科学特征，不能推委给哲学家去解决；但它又有明显的哲学性质，又不能完全推委给科学家，这是一个需要科学家和哲学家共同探讨的问题。

根据温斯顿(P.H.Winson)的定义[17]：人工智能的中心目标是为了使计算机更加有用和了解那些使智能的实现成为可能的原理。从这个定义出发，计算机科学家和工程师需要知道人工智能如何能帮助他们解决难题；心理学家、哲学家、语言学家等需要了解人工智能与他们专业的关系。

人工智能的研究范围是极为宽广的，也没有明确的界限，其中主要有以下各个研究课题：问题求解、自然语言处理、感觉及模式识别、信息存贮与检索、机器人控制、棋类游戏、专家系统、知识工程等等。

从方法上看，人工智能的研究有许多不同的方法，形成了不同的学派。目前，比较有影响的学派是：数学学派和心理学学派。数学学派完全依靠算法来求解问题，不太注重人在解题时的特点；心理学派则主张把人在解决各种问题时所使用的思维过程、规则和策略等编成启发式程序，用它来解问题。除了这二种学派之外，还有用神经控制论的理论和方法来研究人工智能，来解决智能机器的设计问题，这种方法是假定存在着排列成随机网络或有序网络的大量的极简单的信息处理单元，以及某些促进或者抑制它们的活动的过程，由这些网络构成自组织系统，通过与环境相互作用的学习过程获得智能行为。这些研究工作的意图是模拟神经系统的自组织能力，系统的基本构成单元是根据神经元的特性来设计的。目前，一般认为，"启发式程序"的方法是人工智能研究的"主流"方法，它也被称为"认知模型"的方法。

智能的人工模拟工作，是从1958年左右开始的，美国麻省理工学院研究组的明斯基(M.Minsky)和麦卡锡(J.McCarthy)两人的工作为以后的研究指明了方向，麦卡锡是LISP程序语言的设计者。美国卡内基大学的纽厄尔(Newell)、西蒙(Simon)所作的通用解题程序研制工作以及塞缪尔(Samuel)为首的国际商业机器公司工程课题研究组的工作，为人工智能的研究奠定了重要的基础。

进入60年代以来，人工智能的研究更为迅速，在自然语言的

处理、定理的机器证明、专家咨询系统、智能机器人的研究中都取得了丰硕的成果。由于人工智能的一系列成果，使得控制系统进入了高级阶段——智能控制系统。

15.2 人工智能程序的设计原理

在非人工智能的程序设计中，设计者首先要提出一种算法，以解决某一问题。然后，再把这种算法翻译成某种程序设计语言，再利用这个程序在计算机上求解。通常，人们在用计算机求解问题时，可以归结为以下三步：

第一，把待求解的问题描述形式化。形式化的实质是符号化，它是使求解过程机械化和自动化的前提。数学中的集论、图论、数理逻辑和自动机理论都是使问题描述形式化的有力工具。

第二，把求解这个问题的过程"机械化"，即把它转化成某个算法，以便机械地去执行。算法是一个纯数学问题。对于计算机而言，数学问题主要是二种：数值计算和逻辑推理。数值计算是数学中机械化程度最高的部分，逻辑推理的机械化程度较低。此处的所谓算法，必须具有确定性（即每一步骤是确定、唯一的）、普遍性（即算法必须要保证能解决一类问题中的每个问题）和有效性（即对该类问题在有限运算后能得出所求的结果）。

第三，实现求解的自动化。即把算法翻成计算机程序设计语言，交给机器去执行。

然而，在上述的求解方法中，往往会产生一些困难。

首先，迄今为止，并不是所有问题都能形式化的，例如，思维是否是一个形式化系统呢？冯·诺意曼曾指出：人脑的语言不是数学的语言。语言在很大程度上只是历史的事件，语言是多样性的，其中并没有什么绝对的和必要的东西。目前，大多数科学家和哲学家都认为思维是不能完全形式化的。这又回到机器能否思维的问题上。但在人工智能的研究中，人们研究的仅仅是一些有限的形式化系统。因此，我们将假定形式化问题是可能的，转而分析关于算法和"自动化"的问题。

其次，有相当多类型的问题，经数学家证明，没有一种算法可以解决某类问题中的一切问题。例如，我们希望能设计一种逐步循进的算法，使它能检查一种用BASIC语言设计的计算机程序，判定这个程序在被执行时是否会进入无休止的死循环。当然，这是一种十分有吸引力的算法。可惜，数学家已经证明，任何BASIC程序都不能用逐步循进的算法来作出上述判断。这个结论适用于其他任何一种通用程序设计语言编写的计算机程序。

另外，即使存在一种算法，可以解决某类问题中的一切问题，但在实际执行时，由于需要过长的时间以致无法实现。例如，许多算法的执行时间与2^n，$n!$和n^n等表达式成正比。这些算法是按指数时间执行。对于这类算法，只有在处理某类问题中的最小问题时才能实现。随着问题的增大，甚至会需要几千年的计算时间！

关于计算机求解的自动化问题，实质上就是求解的程序化问题。程序化是靠程序语言来实现的，在人工智能语言之前，计算机上常用的语言都是针对数值计算的，人工智能所探讨的问题，多数是非数值问题求解，例如符号处理和表处理。为此，人工智能专家研究了各种形式语言如LISP语言。

从以上的分析可以看出，算法上遇到的困难是非常突出的。然而，如果不是计算机，而是人在求解问题，情况就会不同。

每一个有"上机"经验的人，都能相当成功地分析计算机程序，无论是BASIC程序或是其他计算机语言的程序。

我们要求算法不能出错，而人们偶然出错是允许的，"失败乃成功之母"，人们通常采用基本能正常工作的方法，只是当这个方法行不通时，才转向其他方法。

人在求解问题时，并不总是一定要找出问题的精确解或最佳解。能求到一个近似解，往往已很满意。力图求得更好的解，常常要费更大的功夫。

人在求解问题时的上述特点，使得人在解决大多数实际问题时，远比死板的算法成功。人们采用难免会出错的、近似的、快速

的、但并不完美的技术，却常常能对实际问题求出切实可行的解。

于是产生一个十分自然的问题：在求解问题时，为何不可将“死板”的算法和人灵活的思维结合起来呢？显然，摒弃人们在解决各种问题时所使用的方法、策略和经验等聪明才智是极不明智的。所以，人工智能专家的注意力主要集中在人类所采用的、比较容易出错的、却似乎是更成功的“才智”方面，而并不试图编制那些保证能解决各大类问题的算法。这正是目前“主流”人工智能学派的思想基础。

程序设计原理的基本要点是：启发式方法、模式识别、方案制订和知识表示。

启发式方法 人类解决问题的一种方法是搜索法，也就是对几种可能的解法逐个进行试验，直到求出问题的解。如果不加选择的对每一个方法逐个尝试，则称为盲目搜索。显然，盲目搜索是很笨的，如果所求解的问题包含许多因素，那么所有因素的可能组合数就会相当巨大，以致于无法求解。这种效应通常称为组合爆炸。

如果用一些提示和经验来指导搜索的方向，问题的求解就可能迅速获得，组合爆炸现象就可以避免发生。这种搜索方法被称为启发式搜索法。启发(heuristics)的原意是“帮助发现”。据说它起源于阿基米德的著名叫喊“Eureka！”(我想出了！)这个希腊词。不过，人们对古希腊语的发音问题存有争议，阿基米德实际上叫喊的可能不是“Eureka！”，而是“Heureka！”[43]。

人们把一些策略、技巧、窍门或简化步骤作为规则编进程序就构成了启发式程序，从而可由计算机来完成启发式搜索过程。人工智能专家费根鲍姆(Feingenbaum)和费尔德曼(Feldman)给启发法下了定义：启发法是一种近似方法、一种战略、一种迅速获得成功的诀窍、一种简化、或者是任何能够在大的问题空间中大大缩小搜索范围的方法。

谚语是启发式的生动例子。例如：

- 诚实是最好的政策。
- 节约致富。
- 小洞不补，大洞吃苦。
- 三思而后行。
- 一次不成功，试一次，再试一次。

显然，每一句谚语都是一种提示和忠告，但是它只适用于一种特定的情况，而且没有一句谚语保证总会产生令人满意的结果。即使在适用的情况下，事物发展的结果也不一定都符合谚语所说的情况。

所有的启发式方法都有下述特点：它不保证总能解决问题，而只提出值得进行的尝试。但在大多数情况下能使问题较好地解决，而无需大量的计算。由于这个特点，使得启发式方法成为人工智能程序设计中最主要的方法。

模式识别 因为每一种启发法只适用于一种特定的情形，所以人们需要用某种方法来观察问题所处的条件，以确定选用哪一种启发式方法可以应用。这就需要在问题所处的条件中寻找各种模式。它可以是视觉模式或听觉模式，也可以是其他形式（或混合模式）的模式。人工模式识别的研究可以说是"给计算机装上眼睛和耳朵"。

人进行模式识别是不困难的，一个人在辨认写得很潦草的字迹或在酒会上与人交谈，不会被认为是作了一件了不起的智力工作。但要做同样的工作，机器却挺难模拟。关于模式识别的研究是一项涉及面很广的专门学问，此处不作详细论述。模式识别对实现启发式程序有很重要的意义。例如一个技术高明的老师傅和一个受过良好教育的初学者都知道同样的启发法，但老师傅一眼就能看出一定的模式，提出最有效的启发法；可是初学者却要一个接一个地去试验，直到他碰巧找到一个适用的方法为止。

方案制订 避免组合爆炸的另一种方法是首先设计一个解题的方案，然后只考虑那些与方案一致的解法。关于这一点，美国学者奈尔·格雷厄姆(Neill Graham)举了一个很形象的例子[19]：

假定你要开车到一个很远的城市去，并且不希望在开车时经常翻看地图。另一方面，路标又不告诉你怎样到达远方的目的地，而只告诉你怎样从一个城市到达另一个邻近的城市。

要解这个问题，就要对你的旅程制订一个方案。出发前，你先查看地图，然后利用这样的启发法——你要经过的几个城市应大致位于从你的起点到终点的一条直线上。你可以把所要经过的城市列成一张表。驾驶时，你就根据路标的指引，从表上的一个城市到达另一个城市，从而使该方案易于实现。这样，就大大地减少了你在驾车时始终要考虑的从起点到终点之间可能存在的路径数目。例如，当你离开某个城市时，不必考虑离开这个城市的每一条道路，而只要沿着路标的指引，走向表格中列出的下一个城市就可以了。

因此，制订一个方案，就可以大大减少每步搜索所必须考虑的各种可能路径的数目，从而减少发生组合爆炸的可能性。

知识表示 由于智能活动过程主要是一个获取并应用知识的过程，而知识必须有适当的表示形式才能在计算机中存储和使用。解决问题的启发式搜索法和方案，以及导出这些启发式法和方案的模式都必须贮存在计算机里，计算机在求解问题时应能根据相应的模式很快提出解题的具体方案。要做到这一点，其先决条件是知识的恰当表示。

一般说来，知识如何表示是与所要解决的问题的性质以及解决的方法密切相关的，它总是和推理策略同时研究的。目前，知识表示的方法很多，例如有逻辑表示法、语义网络表示法、产生式表示法、特性表示法、框架表示法及过程表示法等。这些都涉及较多的计算机软件科学的知识，它也是专家系统的基础。

以上简略地说明了在人工智能程序设计中的主要基本原理，上述的各个方面是互相联系的。问题求解要依靠模式识别和知识表述，模式识别也包含问题的求解（寻找模式本身就是一个问题求解的过程），而知识的表达，必须便于存入存贮器里，从存贮器里检索合适的信息则又会涉及到问题求解和模式识别两方面。

15.3 应用与前景

以人工智能为核心的智能控制论已经被广泛地应用，而且正在向人类表示智能的每一个领域渗透。

15.3.1 博弈

古老的国际象棋曾经是智能控制的最早研究对象之一。在电子计算机出现之前，就有人试图建造下棋自动机了。18世纪末，冯·肯佩伦(Von Kempelen)造出了一个下棋"自动机"，起名为梅尔泽尔下棋自动机 (Maelzel Chess Automaton)，它曾引起轰动。可惜，它只是一个由一位棋艺高明的侏儒扮演的"自动机"。第一台真正的下棋自动机是由托雷斯·伊·克维多(Torres′ y Que′vedo)在 1914 年造出来的[43]。1958 年在布鲁塞尔举行的国际博览会上展出了一台自动机。但它只能下在棋盘上只剩下双方的王以及一只属于自动机的车的残局。此时，已有一种算法使自动机总能得胜。自动机中还装有放音设备，得胜时会发出胜利的叫喊声。

数字计算机的出现使能下全局的象棋自动机成为可能。图灵、申农等人都研究过如何编制下棋程序。1976年出版了较好的机器棋手，它能战胜一大批象棋好手，被定为三级棋手，并荣幸地成为某地方象棋学会的荣誉会员。这种程序的工作原理就是用所谓"树"来表示棋局发展的种种可能性，这种树称为预见树。

除了国际象棋之外，这种智能游戏的研究也涉及跳棋，三子棋和围棋。跳棋比国际象棋要简单得多，根据申农的计算，其可能的棋局状态数大约是国际象棋的可能棋局状态数的立方根。申农求得的国际象棋的可能棋局状态数为10^{43}，古德认为，减去出现状态为零的棋局状态，这一数字的估计值可能为10^{24} [43]。围棋的自动下棋机的研究更为困难，下围棋在本质上是一种几何学和拓扑学性质的问题，它是人的感知过程所特有的一种能力，现在的计算机尚无法模拟。所能设计的仅是下棋水平极低的程序。

在定理机器证明的研究中，人工智能获得了较大的成功。1976年美国数学家阿伯尔(Appel)和哈肯(Haken)用机算机证明了四色定理：任何一个平面地图至多用四种颜色即可把相邻的区域区别开来(任何区域的边界线段的两个顶点不在同一颜色中)。这是一个一百多年来几代数学家都未能证明的难题。

目前，人工智能的二个比较重要的应用领域是机器人学和专家系统。

15.3.2 机器人

机器人是一种靠自身动力和控制能力来实现各种功能的机器。它与通常的动力机器的不同之点在于，它不但有力量，还能靠自我控制来工作。机器人在接受任务之后，能一步一步地执行该项任务，不再要人介入。这是一个非常广义定义下的机器人。满足上述定义的机器人其复杂程度可以差别很大。在智能控制论中所研究的机器人是一种具有人工智能的机器人，它能用“眼睛”和“耳朵”接受输入信息，它的控制系统是一台计算机。这类高级的机器人能与它们所处的环境进行复杂的信息交换，以执行各种高级命令。

在设计高级机器人时，需要考虑以下三个问题：

(1) 执行器或操作器。这是机器人的机械部件。

(2) 传感器。它用于把现实世界的信息传送给机器人。传感器是机器人的核心部件。高级传感器的研制与神经控制论有关。

(3) 控制。这是一种计算机程序。该程序可向机器人发出命令，并根据从传感器获取的信息使执行器按适当的方式移动。

机器人是现代科学技术综合应用的结果，从控制论的角度，关心的是机器人的控制系统。机器人的控制程序中必须保存一个数据库或是描述机器人工作环境的模型。在这样的环境中，用问题求解法确定采取哪些行动会成功地完成规定的任务。同时，问题求解又要涉及上述启发式方法和逻辑推理、知识表示等等。模式

识别可以从传感器中提取信息，如果要实现人和计算机的对话就需要进行自然语言的处理，目前的许多机器人都采用LISP语言编写程序。

从控制的结构上看，机器人是一个复杂的大系统，大系统理论中关于分层、分级、递阶的控制方法将被运用。因此，机器人的控制程序常常是分层或分级组织的，顶层程序从外界接受高级命令，例如人的自然语言；底层程序把详细的命令发给机械控制部件，去驱动机器人的执行器；中间层次的程序则处理中等级的细节问题。各个不同层次中的各个子系统往往是互相关联的，各层次之间也需要信息的传送和反馈。总之，机器人的控制程序和系统是极为复杂的。智能级别愈高的机器人，其控制机制也将更为高级。

美国斯坦福研究院的自推动型机器人是比较高级的机器人，它取名为"Shakey"。通过无线电可与作为机器人的"大脑"计算机联系。这种机器人能在一套房间中到处走动，通过一种检测装置随时确定自己在房间中的位置，并能辨认房间中的物体。它能接受"将2号房间中的立方体推到4号房间中去"一类的指令，并因此计划出绕过已知障碍物的路线。在路上遇到新的障碍物时，还能相应地修改计划。

目前，这类高级的机器人的认识功能是比较高级的，但行动却很慢，这与计算机的计算效率有关。与具有真正智能的生物控制系统相比，这些机器人是很初级的，仅仅能完成一些比较简单的工作。然而，目前的研究已经取得了相当快的进展，机器人的研制已引起愈来愈广泛的重视。

15.3.3 专家系统

60年代之后，人工智能的又一重大成果是"专家系统"。所谓专家系统，就是把专家们在解决各种问题时的经验、策略等编成启发式程序来进行模拟。专家系统是一种计算机程序，它可以以专家的水平完成专门的、难度较高的任务。它的结构大致包括以下五个部分：

(1) 知识库。这是专家知识、经验与书本知识、常识的存贮器。

(2) 数据库。它用于存储各领域内的初始数据和推理过程中得到的各种中间信息。

(3) 推理机。它是一组程序。由它控制、协调整个系统,并根据当前输入的数据和知识库中的知识,按一定的推理策略,去解决当前的问题。

(4) 解释部分。它也是一组程序,负责对推理给出必要的解释,为使用和维护该系统提供方便,使用户易于理解和接受。

(5) 知识获取部分,它为修改、扩充知识库的知识提供手段。

目前,已经出现了"计算机教师"、"计算机医生"、"计算机秘书"、"计算机矿物学家"等系统。美国斯坦福大学创制的一个叫做MYCIN的程序是一个能帮助内科医生诊断细菌感染病和为其患者选择合适的治疗方案的高质量程序系统,我国也建立了一些总结名中医治疗诊断经验的专家系统。这类专家系统都获得了较大的成功。

人类的语言和经验是极为丰富的,其中既有确定性因素,也有随机因素,还有所谓模糊因素。人们也经常使用一些不精确的或不完善的资料来进行工作。专家系统既然是模拟人类专家的工作,所以它必然包含上述各种因素,将使用模糊语言和不精确推理。上面提到的 MYCIN 程序就使用了不精确推理,这也是这个系统获得成功的原因之一。

不精确推理的主要理论基础是概率论和模糊集合论。其代表方法主要有:MYCIN的不精确推理模型、主观贝叶斯(Bayes)方法、模糊集理论方法、证据理论、发生率计算等。这种推理方法已成为专家系统中的一个重要课题和研究方法,也是一个正在发展中的领域。

与以启发式程序方法为核心的所谓"主流"派不同,智能控制研究中的另一途径是在研究学习功能和自组织系统中去寻找基本

的机制。这二种不同途径之间的共同点正在逐渐明朗起来。事实上，改变突触强度或神经连结型式的任何规则本质上都是一种解题的启发式方法。

15.3.4 美学

智能控制论研究的另一个有趣领域是艺术领域。人们对编制能创作音乐、美术作品和“写诗”的智能计算机有着强烈的好奇心。但是，在艺术领域，智能一词的含义将更为含混不清，因为我们不可能用客观的词语对一件艺术作品作出“定义”。要在计算机程序中编入人那样的艺术鉴赏能力，必须就美感的性质作出某种分析或假设。关于美感的性质、帕斯克(Pask)[57]曾作过分析，他将美感看成是对适度复杂的新奇环境进行探索，发现其中的结构和意味。从美感的这一模式或理想化出发，便能设计出计算机程序来创作满足这一模式所提示要求的“艺术作品”。帕斯克对一种“音像”装置作了描述，这种装置能产生出与音乐自动同步的视象显示，并使欣赏者参加进来。

在机器作曲方面最著名的例子是希勒(L. A. Hiller)的作品[43]，他将一些实验成果结合在一起，创造出一组以美国伊利诺斯大学一台计算机Illiac命名的组曲。听众对这种不寻常组曲的反应是各种各样的。当然，人们共同认为这是一件平凡的音乐作品。

在计算机写诗方面，曾有两位研究人员使用由50到100个单词构成的一种方法。他们发表了一首计算机输出的“诗”。然而，这首诗中的句子连诗人自己也感到吃惊[38]。这些诗含义暧昧又不押韵，也许这是一种“现代的”作品。在美术领域，机器倒确实作出了一些有趣悦目的作品。它的显著优点是不落俗套。

诸如美感，诗意之类的问题是需要专门研究的。上面介绍的种种情况，应该看成是全面模拟人类智能的一些有益尝试。也许正是这些幼稚的，甚至是荒唐可笑的研究工作，引来了深入的、有意义的成果。

目前，尽管对于“智能”的争论仍在继续，但这并不能阻止人类追求高级智能控制系统的努力，这种努力将带动整个科学的发展，开创出科学技术的新领域。

关于人工智能的未来，英国的控制论专家安德鲁（A.M. Andrew）曾作过如下预测[43]：

“这里不妨作一番预测；到2000年，话题或回答方式不受限制的图灵测试将被通过。不过，即使到了那时，计算机也只能像一个行为十分刻板的人，不会与人作闲聊。也许到2050年，计算机可以和人开玩笑，人和计算机间的亲密关系也许会达到小心翼翼地避免伤害对方感情的程度。”

这种预测是乐观还是悲观，将由实践作出回答。人类也许永远不能制造出和人类完全一样、甚至超过人类的智能机器，但是先进的、高级的智能控制系统将延长和加强人类的感官和脑的部分功能，使脑力劳动自动化，这必将引起整个社会结构的深刻变革。在这个令人神往而困难的领域，制造具有人类智能的机器人的种种努力，也许正像追逐天边的彩虹，永远不可能追上它，但是在追逐彩虹的过程中，人们将发现无数奇异的珍宝！

参 考 文 献

〔1〕 N.维纳,控制论,科学出版社,1963.
〔2〕 W.R.艾什比,控制论导论,科学出版社,1965.
〔3〕 钱学森,工程控制论,科学出版社,1958.
〔4〕 钱学森,宋健,工程控制论,修订版,科学出版社,1980.
〔5〕 A.Я.列尔涅尔,控制论基础,科学出版社,1980.
〔6〕 R.M.格洛里索,工程控制论,科学出版社,1981.
〔7〕 王雨田,控制论、信息论、系统科学与哲学,中国人民大学出版社,1986.
〔8〕 K.J.奥斯特隆姆,随机控制理论导论,科学出版社,1983.
〔9〕 G.N.萨里迪斯,随机系统的自组织控制,科学出版社,1984.
〔10〕 M.G.辛格,大系统的动态递阶控制,科学出版社,1983.
〔11〕 李人厚,邵福庆,大系统的递阶与分散控制,西安交通大学出版社1986.
〔12〕 涂序彦等,生物控制论,科学出版社,1980.
〔13〕 汪云九,顾凡及,生物控制论研究方法,科学出版社,1986.
〔14〕 赵似兰等,生物系统的房室建模与辨识,科学出版社,1987.
〔15〕 何维凌,邓英淘,经济控制论,四川人民出版社,1984.
〔16〕 杨小凯,经济控制论,湖南科学技术出版社,1986.
〔17〕 P.H.温斯顿,人工智能,科学出版社,1983.
〔18〕 N.J.尼尔逊,人工智能原理,科学出版社,1983.
〔19〕 奈尔·格雷厄姆,人工智能使机器"思维",机械工业出版社,1979.
〔20〕 赵瑞清,专家系统原理,气象出版社,1987.
〔21〕 C.J.哈里斯,S.A.比林斯,自校正和自适应控制,科学出版社,1986.
〔22〕 钟义信,信息学漫谈,科学普及出版社,1984.
〔23〕 E.巴沙,生物物理和生理系统分析,科学出版社,1979.
〔24〕 夏天长,系统辨识,清华大学出版社,1983.
〔25〕 松本吉弘,计算机控制系统,冶金工业出版社,1985.
〔26〕 湛垦华,沈小峰,普利高津与耗散结构理论,陕西科学技术出版

社,1982.
〔27〕 G.尼科利斯,I .普利高津, 非平衡系统的自组织,科学出版社,1986.
〔28〕 金观涛,华国凡,控制论和科学方法论,科学普及出版社,1983.
〔29〕 Ю.В.奥尔费耶夫,В.С邱赫金, 人的思维和"人工智能", 中国社会科学出版社,1986.
〔30〕 茹科夫,控制论的哲学原理,上海译文出版社,1981.
〔31〕 张钟俊,张钟俊教授论文集,上海交通大学出版社,1986.
〔32〕 水本雅晴,模糊数学及其应用,科学出版社,1986.
〔33〕 贺仲雄,模糊数学及其应用,天津科学技术出版社,1983.
〔34〕 吴望名等,应用模糊集方法,北京师范大学出版社,1985.
〔35〕 李安华,吴达,模糊数学基础及其应用,新疆人民出版社,1987.
〔36〕 V.Volterra,Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations,Dover,New York,1959.
〔37〕 G.C.Goodwin,R.L.Payne,Dynamic System Identification,Academic Press,1977.
〔38〕 R.F.Brown, *IEEE Transactions on Biomedica Engineering* 27(1980),No.1.1.
〔39〕 H.Maeda, S.Kodama,*Math Biosci*,38(1978),35.
〔40〕 J.J.Di Stefano,*Amer.J.Physiol*,230(1976),476.
〔41〕 H.D Tolley *et all*, *Biometrics* 34(1978),377.
〔42〕 J.H.Matis *et all*,*Bull Math Biol*,38(1976),467.
〔43〕 A. M. Andrew, Artificial Intelliigence ABACUS PRESS,1983.
〔44〕 R.R.Bush,F.Mosteller,Stochastic Models for Learning Wiley New York,1955.
〔45〕 A.Constantinides *et all*,*J.Biotech Bioeng* 12(1970),803.
〔46〕 *Ibid*,12(1970),1081.
〔47〕 A.S.Famzy *et all*,*IEEE Trans* 11(1981),No3,277.
〔48〕 *Ibid*, *IEEE Proc* 129(1982),No.5,163.
〔49〕 王行愚, 蒋慰孙, *Proc Interational conference on Industrial Process Modelling and Control* 2(1985),163.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

[50] R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
[51] H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
[52] S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
[53] Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
[54] *Ibid, Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
[55] L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
[56] H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
[57] G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
[58] B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
[59] D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
[60] P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
[61] J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
[62] L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
[63] J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
[64] Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
[65] Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

[50] R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
[51] H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
[52] S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
[53] Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
[54] *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
[55] L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
[56] H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
[57] G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
[58] B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
[59] D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
[60] P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
[61] J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
[62] L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
[63] J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
[64] Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
[65] Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76～99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

[50] R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
[51] H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
[52] S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
[53] Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
[54] *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
[55] L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
[56] H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
[57] G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
[58] B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
[59] D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
[60] P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
[61] J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
[62] L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
[63] J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
[64] Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
[65] Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

[50] R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
[51] H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
[52] S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
[53] Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
[54] *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
[55] L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
[56] H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
[57] G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
[58] B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
[59] D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
[60] P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
[61] J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
[62] L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
[63] J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
[64] Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
[65] Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

[50] R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
[51] H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
[52] S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
[53] Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
[54] *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
[55] L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
[56] H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
[57] G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
[58] B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
[59] D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
[60] P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
[61] J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
[62] L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
[63] J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
[64] Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
[65] Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

[50] R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
[51] H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
[52] S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
[53] Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
[54] *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
[55] L. J. Fogel *et al*, Artificial Intelligience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
[56] H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
[57] G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
[58] B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
[59] D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
[60] P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
[61] J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
[62] L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
[63] J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
[64] Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
[65] Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

[50] R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
[51] H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
[52] S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
[53] Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
[54] *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
[55] L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
[56] H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
[57] G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
[58] B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
[59] D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
[60] P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
[61] J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
[62] L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
[63] J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
[64] Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
[65] Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

[50] R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
[51] H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
[52] S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
[53] Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
[54] *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
[55] L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
[56] H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
[57] G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
[58] B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
[59] D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
[60] P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
[61] J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
[62] L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
[63] J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
[64] Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
[65] Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

[50] R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
[51] H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
[52] S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
[53] Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
[54] *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
[55] L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
[56] H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
[57] G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
[58] B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
[59] D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
[60] P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
[61] J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
[62] L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
[63] J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
[64] Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
[65] Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

[50] R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
[51] H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
[52] S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
[53] Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
[54] *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
[55] L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
[56] H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
[57] G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
[58] B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
[59] D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
[60] P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
[61] J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
[62] L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
[63] J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
[64] Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
[65] Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76～99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76～99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76～99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

[50] R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
[51] H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
[52] S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
[53] Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
[54] *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
[55] L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
[56] H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
[57] G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
[58] B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
[59] D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
[60] P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
[61] J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
[62] L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
[63] J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
[64] Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
[65] Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76～99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

[50] R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
[51] H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
[52] S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
[53] Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
[54] *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
[55] L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
[56] H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
[57] G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
[58] B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
[59] D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
[60] P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
[61] J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
[62] L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
[63] J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
[64] Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
[65] Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

[50] R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
[51] H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
[52] S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
[53] Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
[54] *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
[55] L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
[56] H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
[57] G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
[58] B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
[59] D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
[60] P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
[61] J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
[62] L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
[63] J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
[64] Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
[65] Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

[50] R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
[51] H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
[52] S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
[53] Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
[54] *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
[55] L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
[56] H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
[57] G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76～99.
[58] B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
[59] D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
[60] P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
[61] J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
[62] L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
[63] J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
[64] Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
[65] Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

[50] R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
[51] H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
[52] S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
[53] Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
[54] *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
[55] L. J. Fogel *et al*, Artificial Intelligience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
[56] H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
[57] G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
[58] B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
[59] D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
[60] P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
[61] J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
[62] L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
[63] J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
[64] Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
[65] Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

[50] R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
[51] H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
[52] S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
[53] Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
[54] *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
[55] L. J. Fogel *et al*, Artificial Intelligience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
[56] H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
[57] G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
[58] B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
[59] D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
[60] P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
[61] J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
[62] L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
[63] J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
[64] Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
[65] Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76～99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid, Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76～99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

[50] R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
[51] H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
[52] S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
[53] Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
[54] *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
[55] L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
[56] H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
[57] G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
[58] B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
[59] D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
[60] P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
[61] J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
[62] L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
[63] J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
[64] Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
[65] Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

[50] R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
[51] H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
[52] S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
[53] Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
[54] *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
[55] L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
[56] H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
[57] G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
[58] B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
[59] D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
[60] P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
[61] J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
[62] L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
[63] J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
[64] Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
[65] Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intelligience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

[50] R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
[51] H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
[52] S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
[53] Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
[54] *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
[55] L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
[56] H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
[57] G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
[58] B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
[59] D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
[60] P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
[61] J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
[62] L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
[63] J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
[64] Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
[65] Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intelligience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

[50] R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
[51] H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
[52] S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
[53] Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
[54] *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
[55] L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
[56] H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
[57] G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
[58] B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
[59] D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
[60] P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
[61] J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
[62] L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
[63] J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
[64] Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
[65] Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intelligience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

[50] R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
[51] H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
[52] S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
[53] Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
[54] *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
[55] L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
[56] H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
[57] G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
[58] B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
[59] D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
[60] P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
[61] J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
[62] L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
[63] J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
[64] Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
[65] Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

[50] R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
[51] H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
[52] S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
[53] Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
[54] *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
[55] L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
[56] H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
[57] G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
[58] B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
[59] D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
[60] P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
[61] J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
[62] L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
[63] J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
[64] Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
[65] Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

[50] R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
[51] H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
[52] S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
[53] Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
[54] *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
[55] L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
[56] H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
[57] G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
[58] B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
[59] D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
[60] P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
[61] J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
[62] L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
[63] J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
[64] Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
[65] Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intelligience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

[50] R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
[51] H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
[52] S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
[53] Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
[54] *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
[55] L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
[56] H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
[57] G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
[58] B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
[59] D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
[60] P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
[61] J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
[62] L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
[63] J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
[64] Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
[65] Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76～99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.

〔50〕 R.N. Hardy, Homeostasis, Edward Arnold, 1976.
〔51〕 H.J. Winton *et al*, *Simulation* 15 (1970), 213.
〔52〕 S.Kitamura *et alls Preprint of 5th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation* 1(1979), 875.
〔53〕 Chow G. C, S.B.Megdal *IEEE Trans.Automatic Control*, 23 (1978), No.2, 344.
〔54〕 *Ibid*, *Int Economic Review*, 13 (1972), No. 1, 15.
〔55〕 L. J. Fogel *et al*, Artificial Intellgience Through Simuated Evaluation, Wiley. N. Y, 1966.
〔56〕 H. A.Simon The New Science of Management Decision, Harper and Row N. Y., 1960.
〔57〕 G. Pask, Cybernetics Art and Ideas 1971, PP.76~99.
〔58〕 B.D.O.Airderson, J. B.Moore, Linear Optimal Control Prentice-Hall, Englewood Cliffs' N. J., 1971.
〔59〕 D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, *Proc.IEE*, 126 (1979), No. 6, 633.
〔60〕 P. J. Gawthrop, *Int. J. Control*, 31(1980), No.5, 973.
〔61〕 J. Sklansky, *IEEE Spectrum*, 1(1964), No.5, 172.
〔62〕 L. A. Zadeh, *IEEE*, 51(1963), 469.
〔63〕 J. S. Meditch, *IEEE Trans Automatic Control*, 9 (1964), 477.
〔64〕 Chow G. C., Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York Wiley 1975.
〔65〕 Ungan P., Systems theoretical analysis of potentials evoked in the cat anditory cortex, Hacettepe Univ., Ankara, 1974.